Tidslogik som Multimodal Logik

Daniel Rönnedal

Abstrakt
Tidslogik är en gren av logiken som handlar om temporala begrepp, satser, argument och system. Inom denna gren av logiken undersöker man t.ex. uttryck såsom ”Det kommer alltid vara fallet att”, ”Det kommer någon gång i framtiden vara fallet att”, ”Det har alltid varit fallet att”, ”Det var någon gång i det förflutna fallet att”. Logiska relationer mellan satser som innehåller temporala begrepp studeras och giltigheten hos argument som består av sådana satser analyseras. Ett multimodalt språk är ett modalt språk som inkorporerar flera olika modala operatorer. En multimodal semantik är en modal semantik som innehåller flera olika s.k. tillgänglighetsrelationer som svarar mot de olika modala operatorerna. Och ett multimodalt system är ett modalt system (av teorem) som är baserat på ett multimodalt språk. Multimodal logik är en gren av modallogiken som handlar om multimodala språk, semantiska teorier och system. I den här uppsatsen visar jag hur tidslogiken kan betraktas som en del av den multimodala logiken. Jag utvecklar ett antal så kallade semantiska tablåsystem och bevisar att dessa är sunda och fullständiga i relation till deras semantik.

1. Introduktion

Tidslogik är en gren av logiken som handlar om temporala begrepp, satser, argument och system. Inom denna gren av logiken undersöker man t.ex. uttryck såsom ”Det kommer alltid vara fallet att”, ”Det kommer någon gång i framtiden vara fallet att”, ”Det har alltid varit fallet att”, ”Det var någon gång i det förflutna fallet att”. Logiska relationer mellan satser som innehåller temporala begrepp studeras och giltigheten hos argument som består av sådana satser analyseras. Ett multimodalt språk är ett modalt språk som inkorporerar flera olika modala operatorer. En multimodal semantik är en modal semantik som innehåller flera olika s.k. tillgänglighetsrelationer som svarar mot de olika modala operatorerna. Och ett multimodalt system är ett modalt system (av teorem) som är baserat på ett multimodalt språk.

Filosofiska Notiser, Årgång 1, Nr. 1, December 2014, 59-90

Multimodal logik är en gren av modallogiken som handlar om multimodala språk, semantiska teorier och system. I den här uppsatsen visar jag hur tidslogiken kan betraktas som en del av den multimodala logiken. Jag utvecklar ett antal så kallade semantiska tablåsystem och bevisar att dessa är sunda och fullständiga i relation till deras semantik.[33]

Uppsatsen är indelad i fem avsnitt. Avsnitt 2 handlar om syntax. I avsnitt 3 beskriver jag den semantik som är gemensam för alla system, jag tar upp ett antal grundläggande begrepp och undersöker några möjliga egenskaper hos tiden. Avsnitt 4 handlar om bevisteori. Jag går igenom ett antal tablåregler och visar hur dessa kan användas för att generera en mängd semantiska tablåsystem. Avsnitt 5 innehåller sundhets- och fullständighetsteorem.

2. Syntax

Språket TS består av följande alfabet och satser.

2.1. Alfabet

En mängd satsbokstäver p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2, …
De satslogiska konnektiven $\neg$ (negation), $\wedge$ (konjunktion),
$\vee$ (disjunktion), $\supset$ (materiell implikation) och $\equiv$ (materiell ekvivalens).
De temporala operatorerna G, F, H, P, [G], $\langle F\rangle$, [H], $\langle P\rangle$.
Parenteser) och (.

2.2. Satser

Språket TS består av alla satser (välformade formler) som genereras från följande villkor.

Varje satsbokstav är en (atomär) sats.
Om A och B är satser, så är $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ och $(A \equiv B)$ satser.
Om B är en sats, så är också $\neg B$, GB, FB, HB, PB, [G]B, $\langle F\rangle B$, [H]B och $\langle P\rangle B$ satser.
Ingenting annat är en sats.

[33] För mer information om tidslogik, se t.ex. Barringer, Fisher, Gabbay & Gough (2000), Burgess (1984), Finger, Gabbay & Reynolds (2002), Galton (1999), Goldblatt (1992), Kröger & Merz (2008), McArthur (1976), Needham (1975), Prior (1957), (1967), Rescher & Urquhart (1971), van Benthem (1983), Øhrstrøm & Hasle (1995).

A, B, C, D… representerar godtyckliga satser i språket (inte nödvändigtvis atomära). Den grekiska bokstaven Σ står för en mängd satser och den tomma mängden betecknas ∅. De satslogiska konnektiven är välkända från satslogiken. Parenteser runt välformade formler utelämnas i regel om ingen mångtydighet uppstår. Falsum kan introduceras genom en definition på vanligt vis. Övriga satser i språket läses på följande sätt.

GB: Det kommer alltid att vara fallet att B.
FB: Det kommer någon gång (i framtiden) vara fallet att B.
HB: Det har alltid varit fallet att B.
PB: Det har någon gång (i det förflutna) varit fallet att B.
[G]B: Det är och kommer alltid att vara fallet att B.
⟨F⟩B: Det är eller kommer någon gång (i framtiden) vara fallet att B.
[H]B: Det är och har alltid varit fallet att B.
⟨P⟩B: Det är eller har någon gång (i det förflutna) varit fallet att B.

3. Semantik

Den grundläggande tanken bakom den semantik som beskrivs i det här avsnittet är att tiden betraktas som en struktur, som en mängd element, en mängd tidpunkter som står i vissa tillgänglighetsrelationer till varandra. Dessa relationer inkluderar t.ex. relationen *inträffar tidigare än* och relationen *inträffar senare än*. Att tidslogiken tolkas som en (multi)modal logik innebär att denna struktur beskrivs ”inifrån”: sanningen (hos våra satser) är relativ till olika tidpunkter. En sats kan med andra ord vara sann vid en tidpunkt och falsk vid en annan. Vissa sanningar är emellertid eviga, är de sanna vid en tidpunkt är de sanna vid alla tidpunkter. Alla logiska sanningar är eviga.

Genom att införa olika villkor på tillgänglighetsrelationerna, kan vi tvinga denna struktur att ha en viss form. Vi kan t.ex. trycka ihop tidpunkterna till en linje, som vi sedan kan dra ut så att den blir oändlig i en eller båda riktningarna. Vi kan böja tiden så att den formar en cirkel eller så kan vi tillåta att det finns en första och/eller en sista tidpunkt. Vi kan packa tiden oändligt tätt, så att det mellan varje par av (distinkta) tidpunkter t och t′, finns en tidpunkt t″, eller så kan vi tillåta att den är diskret, m.m. Vi kan rada upp alla tidpunkter i det förflutna på ett led men låta framtiden vara öppen, så att tiden bildar ett kosmiskt träd som förgrenar sig mot framtiden men är determinerad i det förflutna. Vilka egenskaper tiden *faktiskt* har tycks åtminstone delvis vara en metafysisk eller empirisk fråga.

3.1. Grundläggande termer

Låt oss börja med att definiera en mängd grundläggande begrepp.

Ramar. En temporal ram, F, är en relationell struktur $<T, <, >, \leq, \geq>$, där T är en icke-tom mängd av tidpunkter, och $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ är fyra dyadiska tillgänglighetsrelationer mellan tidpunkterna i T ($<$ är en delmängd av $T \times T$, etc.). Den intuitiva tolkningen av tillgänglighetsrelationerna är som följer.

$t_1 < t_2$: t_1 inträffar före/tidigare än t_2
$t_2 > t_1$: t_2 inträffar efter/senare än t_1
$t_1 \leq t_2$: t_1 inträffar samtidigt med eller före/tidigare än t_2
$t_2 \geq t_1$: t_2 inträffar samtidigt med eller efter/senare än t_1

Modeller. En temporal modell, M, är en struktur $<F, V>$, där F är en temporal ram och V är en värdering eller tolkningsfunktion, som tilldelar sanningsvärden T (sann) eller F (falsk) till varje satsbokstav vid varje tidpunkt i T.

Om $M = <F, V>$ så säger vi att M är baserad på F. Vi kan också tala om en modell, M, direkt som en struktur $<T, <, >, \leq, \geq, V>$, där tillgänglighetsrelationerna och T tolkas som vanligt. Om t är ett element i T och T ingår i M eller F, så kan vi även säga att t är ett element eller ingår i M och F. Vt(p) = T (V(p, t) = T eller $V(<p, t>)$ = T) innebär att tolkningsfunktionen V tilldelar p sanningsvärdet T vid tidpunkt t, dvs. att p är sann vid (eller i) tidpunkt t. Vt(p) = F (V(p, t) = F eller $V(<p, t>)$ = F) innebär att tolkningsfunktionen V tilldelar p sanningsvärdet F vid tidpunkt t, dvs. att p är falsk vid (eller i) tidpunkt t. Låt $M = <F, V>$. Om Vt(p) = T, så säger vi att p är sann vid t i modell M under värdering V; och om Vt(p) = F, så säger vi att p är falsk vid t i modell M under värdering V. Om det i en given kontext är uppenbart vilken modell och värdering vi talar om, så kan vi utelämna ”i modell M” och ”under värdering V” och enbart tala om p som sann eller falsk vid (eller i) en given tidpunkt. ”**F**” representerar en klass av ramar, ”**M**” en klass av modeller.

3.2. Sanningsvillkor

$\Vdash_{M, t}$ B står för att B är sann vid tidpunkt t i modell M. De atomära satsernas sanningsvärden bestäms av tolkningsfunktionen V, dvs.

$\Vdash_{M, t}$ p om och endast om (omm) Vt(p) = T, för varje satsbokstav p i vårt språk.

Sanningsvillkoren för de satslogiska konnektiven är de gamla vanliga. För konjunktion gäller t.ex.:

$\Vdash_{M,t} (A \wedge B)$ omm $\Vdash_{M,t} A$ och $\Vdash_{M,t} B$.

$A \wedge B$ är alltså sann vid en tidpunkt t (i en modell M) omm A är sann vid t (i M) och B är sann vid t (i M). Övriga villkor ser ut på följande sätt.

$\Vdash_{M,t} GB$	omm	det för varje tidpunkt t' i T sådan att $t' > t$ gäller att $\Vdash_{M,t'} B$.
$\Vdash_{M,t} FB$	omm	det finns någon tidpunkt t' i T sådan att $t' > t$ och $\Vdash_{M,t'} B$.
$\Vdash_{M,t} HB$	omm	det för varje tidpunkt t' i T sådan att $t' < t$ gäller att $\Vdash_{M,t'} B$.
$\Vdash_{M,t} PB$	omm	det finns någon tidpunkt t' i T sådan att $t' < t$ och $\Vdash_{M,t'} B$.
$\Vdash_{M,t} [G]B$	omm	det för varje tidpunkt t' i T sådan att $t' \geq t$ gäller att $\Vdash_{M,t'} B$.
$\Vdash_{M,t} \langle F\rangle B$	omm	det finns någon tidpunkt t' i T sådan att $t' \geq t$ och $\Vdash_{M,t'} B$.
$\Vdash_{M,t} [H]B$	omm	det för varje tidpunkt t' i T sådan att $t' \leq t$ gäller att $\Vdash_{M,t'} B$.
$\Vdash_{M,t} \langle P\rangle B$	omm	det finns någon tidpunkt t' i T sådan att $t' \leq t$ och $\Vdash_{M,t'} B$.

Vid varje tidpunkt gäller det alltså att varje sats har exakt ett av de två sanningsvärdena, dvs. att varje sats är antingen sann eller falsk och inte både sann och falsk. Vi ser hur de olika tillgänglighetsrelationerna $<$, $>$, $\leq$ och $\geq$ används i sanningsvillkoren för satser vars huvudoperatorer är G, F, H, P, [G], $\langle F\rangle$, [H] och $\langle P\rangle$. GB är t.ex. sann vid en tidpunkt t omm B är sann vid varje tidpunkt t' som inträffar senare än t. FB är sann vid en tidpunkt t omm B är sann vid någon tidpunkt t' som inträffar senare än t. PB är sann vid en tidpunkt t omm B är sann vid någon tidpunkt t' som inträffar tidigare än t. [H]B är sann vid en tidpunkt t omm B är sann vid varje tidpunkt t' som inträffar samtidigt med eller tidigare än t. Etc.

3.3. Övriga semantiska begrepp

Vi befinner oss nu i en position där vi kan definiera flera viktiga semantiska begrepp.

Satisfierbarhet i en modell. En mängd satser Σ är satisfierbar i en modell M, Sat_M Σ omm det finns en värld i M i vilken alla element i Σ är sanna.

Giltighet i (eller på) en klass av ramar. En sats B är (semantiskt) giltig i (eller på) en klass av ramar **F** ($\Vdash_{\mathbf{F}}$ B) omm B är sann i varje värld i varje modell baserad på en ram i **F**. Vi skall också säga att B är logiskt sann i en klass av ramar omm B är giltig i denna klass.

Logisk konsekvens i (eller på) en klass av ramar. En sats B är en logisk konsekvens av en mängd satser Σ i (eller på) en klass av ramar **F** ($\Sigma \Vdash_{\mathbf{F}}$ B) omm det för varje modell M baserad på någon ram i **F** och tidpunkt t i M gäller att om alla element i Σ är sanna vid t i M, så är B sann vid t i M. Om $\Sigma \Vdash_{\mathbf{F}}$ B, så kan vi också säga att Σ medför B i **F** och att det argument vars premisser är Σ och slutsats B är giltigt i **F**.

På liknande sätt kan man även definiera flera andra begrepp, t.ex. giltighet i en klass av ramar, giltighet i en klass av modeller, logisk konsekvens i en klass av modeller. Om det i en viss kontext är uppenbart vilken klass av modeller eller klass av ramar vi talar om, kan vi utelämna uttrycken ”i en klass av modeller” och ”i en klass av ramar” och säga att en sats är giltig eller att en mängd satser medför en sats.

3.4. Villkor på temporala ramar

Vi skall undersöka några olika villkor som kan användas för att karaktärisera olika temporala ramar. Dessa villkor är indelade i två olika grupper. Den första gruppen säger något om de formella egenskaperna hos de temporala tillgänglighetsrelationerna <, >, ≤ och ≥. Den andra gruppen uttalar sig om hur de olika tillgänglighetsrelationerna förhåller sig till varandra. I tabell 1 och 2 är Q <, >, ≤ eller ≥, R ≤ eller ≥, och S < eller >. Om R är ≤ så är S <, och om R är ≥ så är S >, och tvärt om. Om Q är <, så är Q^{-1} > och tvärt om. Om Q är ≤, så är Q^{-1} ≥ och tvärt om.

3.4.1. Egenskaper hos de temporala tillgänglighetsrelationerna

Villkor	Formalisering av villkor
C-QT	Reflexivitet $\forall t\, t\, Q\, t$ Ändlöshet bakåt

C-QPD	$\forall t \exists t' t' \mathrel{Q} t$
	Ändlöshet framåt
C-QFD	$\forall t \exists t' t \mathrel{Q} t'$
	Symmetri
C-QB	$\forall t \forall t'(t \mathrel{Q} t' \supset t' \mathrel{Q} t)$
	Transitivitet
C-Q4	$\forall t \forall t' \forall t''((t \mathrel{Q} t' \wedge t' \mathrel{Q} t'') \supset t \mathrel{Q} t'')$
	Täthet
C-QDE	$\forall t \forall t'(t \mathrel{Q} t' \supset \exists t''(t \mathrel{Q} t'' \wedge t'' \mathrel{Q} t'))$
	Gränser bakåt
C-QLB	$\forall t \forall t' \forall t''((t' \mathrel{Q} t \wedge t'' \mathrel{Q} t) \supset \exists t'''(t''' \mathrel{Q} t' \wedge t''' \mathrel{Q} t''))$
	Gränser framåt
C-QUB	$\forall t \forall t' \forall t''((t \mathrel{Q} t' \wedge t \mathrel{Q} t'') \supset \exists t'''(t' \mathrel{Q} t''' \wedge t'' \mathrel{Q} t'''))$
	Fullständighet
C-RF	$\forall t \forall t'(t \mathrel{R} t' \vee t' \mathrel{R} t)$
	Jämförbarhet
C-SC	$\forall t \forall t'(t \mathrel{S} t' \vee t = t' \vee t' \mathrel{S} t)$
	Konvergens bakåt
C-QPC	$\forall t \forall t' \forall t''((t' \mathrel{Q} t \wedge t'' \mathrel{Q} t) \supset (t' \mathrel{Q} t'' \vee t' = t'' \vee t'' \mathrel{Q} t'))$
	Konvergens framåt
C-QFC	$\forall t \forall t' \forall t''((t \mathrel{Q} t' \wedge t \mathrel{Q} t'') \supset (t' \mathrel{Q} t'' \vee t' = t'' \vee t'' \mathrel{Q} t'))$

Tabell 1

Det bör vara mer eller mindre uppenbart hur villkoren i tabell 1 skall tolkas. Jag skall emellertid göra några kommentarer.

Enligt villkoren C-≤T och C-≥T är ≤ och ≥ reflexiva. Givet vår intuitiva läsning av ≤ och ≥, är dessa villkor mycket rimliga. C-≤T, $\forall t\, t \leq t$, säger t.ex. att det för varje tidpunkt t gäller att t inträffar samtidigt med eller före t. Och det förefaller vara uppenbart korrekt att anta att allting inträffar samtidigt med sig självt. Vi kan också undersöka vad som händer om vi antar att < och > är reflexiva; men givet vår informella förståelse av dessa relationer är det ett mindre rimligt antagande. Tvärt om tycks det vara plausibelt att anta att dessa relationer är irreflexiva. För det förefaller vara en mycket rimlig hypotes att ingenting inträffar före sig självt eller efter sig självt. En del kanske t.o.m. skulle vilja betrakta detta som en begreppslig sanning. Vi kan, om vi vill, anta att < och > är irreflexiva, men det innebär inte att ytterligare satser i TS blir giltiga. Därför har jag inte explicit tagit upp dessa villkor. På samma sätt förhåller det sig med symmetri-villkoren. < och > förefaller inte vara symmetriska utan asymmetriska. Det tycks t.ex. vara fallet att om t inträffar före t′, så inträffar inte t′ före t. Trots att dessa villkor är intuitivt mycket rimliga, kan de ifrågasättas. Om tiden är cirkulär och transitiv, är våra tillgänglighetsrelationer varken irreflexiva eller asymmetriska. Tvärt om, då är alla tillgänglighetsrelationer reflexiva och symmetriska. Det är därför jag har tagit upp även dessa något kontra-intuitiva villkor.[34]

C-<PD, $\forall t \exists t' t' < t$, säger att det inte finns någon första tidpunkt. För varje tidpunkt t finns det en tidpunkt t′ sådan att t′ inträffar före t. Det förflutna är så att säga ändlöst. Detta kan t.ex. vara sant om tiden är linjär och det förflutna är oändligt, eller om tiden är cirkulär. Ett möjligt undantag är om tiden är linjär men börjar i en tidpunkt t sådan att $t < t$. Givet vår intuitiva tolkning av ”<”, är denna möjlighet emellertid inte särskilt plausibel, eftersom det skulle innebära att tiden är linjär men börjar i en tidpunkt som inträffar före sig själv.

På motsvarande sätt säger C->FD, $\forall t \exists t' t' > t$, att det inte finns någon sista tidpunkt. För varje tidpunkt t finns det en tidpunkt t′ sådan att t′ inträffar efter t. Framtiden är med andra ord i någon mening ändlös. Detta kan t.ex. vara sant om tiden är linjär och framtiden är oändlig, eller om tiden är cirkulär. Ett möjligt undantag i detta fall är om tiden är linjär men slutar i en tidpunkt t sådan att $t > t$. Inte heller denna möjlighet förefaller vara särskilt plausibel, eftersom det enligt vår intuitiva läsning av ”>” skulle innebära att tiden är linjär och slutar i en tidpunkt som inträffar efter sig själv.

Transitivitetsvillkoren säger att våra temporala relationer är transitiva. C-<4, $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t' < t'') \supset t < t'')$, innebär t.ex. att $<$ är transitiv, dvs. om t inträffar före t′ och t′ inträffar före t″, så inträffar t före t″. Det är intuitivt mycket rimligt att anta att alla våra temporala tillgänglighetsrelationer är transitiva. Trots detta tycks det inte vara absolut säkert att tiden är transitiv. För om tiden är cirkulär och $<$ är irreflexiv eller asymmetrisk, är $<$ inte transitiv.

C-<DE, $\forall t \forall t'(t < t' \supset \exists t''(t < t'' \wedge t'' < t'))$, säger att tiden, eller mer precist att den temporala relationen $<$, är tät. Intuitivt innebär det att det mellan varje par av tidpunkter finns en tredje tidpunkt, eller att tiden är oändligt delbar. Mer precist säger villkoret att om tidpunkt t inträffar före tidpunkt t′ så finns det en tidpunkt t″ sådan att t inträffar före t″ och t″ inträffar före t′. Varje relation som är reflexiv är också tät. Det följer att om $\geq$ är reflexiv, så är $\geq$ tät.

[34] Jag hoppas kunna säga lite mer om en cirkulär tidsuppfattning i en kommande uppsats. Se vidare avsnitt 3.5.

Det här innebär att täthetsvillkoret inte nödvändigtvis medför att det finns oändligt många tidpunkter.

Enligt C-<C, $\forall t \forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$, gäller det för varje par av tidpunkter t och t′ att t inträffar före t′ eller att t är identisk med t′ eller att t′ inträffar före t. Detta villkor är ekvivalent med påståendet att det för varje par av distinkta tidpunkter t och t′ gäller att t inträffar före t′ eller t′ före t. Notera att villkoret även utesluter att det finns två olika tidpunkter som inträffar samtidigt, givet att vi antar att t inträffar samtidigt med t′ om det varken är fallet att t inträffar före t′ eller t′ före t. Om detta villkor är uppfyllt, förgrenar sig tiden varken framåt eller bakåt längs relationen <.

C-<PC, $\forall t \forall t' \forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$, förhindrar att tiden förgrenar sig bakåt och C-<FC, $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$, att tiden förgrenar sig framåt längs relationen <. Om vi antar C-<PC, men inte C-<FC kan vi betrakta tiden som ett (eller en mängd) träd som förgrenar sig framåt, men inte bakåt i tiden. Detta är kanske en rimlig modell av tiden om det förflutna är determinerat men framtiden är öppen.

3.4.2. Relationer mellan de temporala relationerna

Villkor	Formalisering av villkor
	=R-Inklusion
C-=RI	$\forall t \forall t'(t = t' \supset t\ R\ t')$
	SR-Inklusion
C-SRI	$\forall t \forall t'(t\ S\ t' \supset t\ R\ t')$
	RS-Implikation
C-RSI	$\forall t \forall t'(t\ R\ t' \supset (t = t' \vee t\ S\ t'))$
	QQ^{-1}-konversion (inversion)
C-QQ^{-1}C	$\forall t \forall t'(t\ Q\ t' \supset t'\ Q^{-1}\ t)$
	SR-Ändlöshet bakåt
C-SRPD	$\forall t \exists t'(t'\ S\ t \wedge t'\ R\ t)$
	SR-Ändlöshet framåt
C-SRFD	$\forall t \exists t'(t\ S\ t' \wedge t\ R\ t')$
	RS-Transitivitet
C-RS4	$\forall t \forall t' \forall t''((t\ R\ t' \wedge t'\ S\ t'') \supset t\ S\ t'')$
	SR-Transitivitet
C-SR4	$\forall t \forall t' \forall t''((t\ S\ t' \wedge t'\ R\ t'') \supset t\ S\ t'')$
	SR-Gränser bakåt
C-SRLB	$\forall t \forall t' \forall t''((t'\ S\ t \wedge t''\ R\ t) \supset \exists t'''(t'''\ R\ t' \wedge t'''\ S\ t''))$

	SR-Gränser framåt
C-SRUB	$\forall t \forall t' \forall t''((t\ S\ t' \wedge t\ R\ t'') \supset \exists t'''(t'\ R\ t''' \wedge t''\ S\ t'''))$
	RS-Gränser bakåt
C-RSLB	$\forall t \forall t' \forall t''((t'\ R\ t \wedge t''\ S\ t) \supset \exists t'''(t'''\ S\ t' \wedge t'''\ R\ t''))$
	RS-Gränser framåt
C-RSUB	$\forall t \forall t' \forall t''((t\ R\ t' \wedge t\ S\ t'') \supset \exists t'''(t'\ S\ t''' \wedge t''\ R\ t'''))$
	RS-Permutation bakåt
C-RSPP	$\forall t \forall t' \forall t''((t'\ R\ t \wedge t''\ S\ t') \supset \exists t'''(t'''\ S\ t \wedge t''\ R\ t'''))$
	RS-Permutation framåt
C-RSFP	$\forall t \forall t' \forall t''((t\ R\ t' \wedge t'\ S\ t'') \supset \exists t'''(t\ S\ t''' \wedge t'''\ R\ t''))$
	SR-Permutation bakåt
C-SRPP	$\forall t \forall t' \forall t''((t'\ S\ t \wedge t''\ R\ t') \supset \exists t'''(t'''\ R\ t \wedge t''\ S\ t'''))$
	SR-Permutation framåt
C-SRFP	$\forall t \forall t' \forall t''((t\ S\ t' \wedge t'\ R\ t'') \supset \exists t'''(t\ R\ t''' \wedge t'''\ S\ t''))$

Tabell 2

Jag skall kort kommentera några av villkoren i tabell 2.

Enligt C=≤I, $\forall t \forall t'(t = t' \supset t \leq t')$, gäller det att om t är identisk med t′, så inträffar t samtidigt med eller före t′. Identitetsrelationen är med andra ord inkluderad i relationen *inträffar samtidigt med eller före*. Det här är ett mycket rimligt antagande som tycks vara omöjligt att förneka, eftersom det är rimligt att anta att allting inträffar samtidigt med sig självt.

Enligt C-<≤I, $\forall t \forall t'(t < t' \supset t \leq t')$, inträffar t samtidigt med eller före t′ om t inträffar före t′. Relationen *inträffar före* är med andra ord inkluderad i relationen *inträffar samtidigt med eller före*. Detta är ett mycket rimligt antagande. Givet vår informella läsning av ”<” och ”≤” tycks det vara en begreppslig sanning.

C-≤<I, $\forall t \forall t'(t \leq t' \supset (t = t' \vee t < t'))$, säger att om t inträffar samtidigt med eller före t′, så är t identisk med t′ eller också inträffar t före t′. Det här villkoret är mycket rimligt, och tycks vara begreppsligt sant, om vi antar att det inte finns flera olika tidpunkter som inträffar samtidigt. Finns det flera tidpunkter som inträffar samtidigt, är det emellertid inte nödvändigtvis sant.

Om vi antar (C=≤I), (C-<≤I) och (C-≤<I), kan vi definiera ”≤” i termer av ”<” på följande sätt: $\forall t \forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$. Enligt denna definition gäller det att t inträffar samtidigt med eller före t′ omm t är identisk med t′ eller t inträffar före t′. Detta förefaller vara en rimlig definition om vi antar att det inte finns flera olika tidpunkter som inträffar samtidigt.

Enligt C-<>C, $\forall t \forall t'(t < t' \supset t' > t)$, gäller det att om t inträffar före t′, så inträffar t′ efter t. Och enligt C-><C, $\forall t \forall t'(t > t' \supset t' < t)$, gäller det att om t inträffar efter t′, så inträffar t′ före t. Givet vår informella läsning av ”<” och ”>” är dessa villkor mycket rimliga. Tillsammans medför de att ”<” är konversen till ”>” och att ”>” är konversen till ”<”, dvs. att t inträffar före t′ omm t′ inträffar efter t ($\forall t \forall t'(t < t' \equiv t' > t)$) och att t inträffar efter t′ omm t′ inträffar före t ($\forall t \forall t'(t > t' \equiv t' < t)$). Dessa villkor förefaller vara begreppsligt sanna. Är det möjligt att den första januari år 1900 inträffar före den första januari år 2000 samtidigt som det är falskt att den första januari år 2000 inträffar senare än den första januari år 1900? Det tycks vara omöjligt.

3.5. Några samband mellan de olika ram-villkoren

Inte alla villkor vi har nämnt ovan är oberoende av varandra. I det här avsnittet tar jag upp några av de samband som råder mellan dessa. (En trevlig övning kan vara att bevisa alla påståenden i denna sektion.)

Om Q är reflexiv, så är Q ändlös bakåt, ändlös framåt och tät. $\forall t\, t \leq t$ medför t.ex. $\forall t \exists t'\, t' \leq t$, $\forall t \exists t'\, t \leq t'$ och $\forall t \forall t'(t \leq t' \supset \exists t''(t \leq t'' \wedge t'' \leq t'))$.

Om S är jämförbar, så är S konvergent bakåt och konvergent framåt. $\forall t \forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$ medför t.ex. $\forall t \forall t' \forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$ och $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$.

Om S är transitiv, jämförbar och ändlös framåt, så har S gränser framåt. $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t' < t'') \supset t < t'')$, $\forall t \forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$ och $\forall t \exists t'\, t < t'$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset \exists t'''(t' < t''' \wedge t'' < t'''))$. $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t' > t'') \supset t > t'')$, $\forall t \forall t'(t > t' \vee t = t' \vee t' > t)$ och $\forall t \exists t'\, t > t'$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t > t'') \supset \exists t'''(t' > t''' \wedge t'' > t'''))$.

Om S är transitiv, jämförbar och ändlös bakåt, så har S gränser bakåt. $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t' < t'') \supset t < t'')$, $\forall t \forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$ och $\forall t \exists t'\, t' < t$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset \exists t'''(t''' < t' \wedge t''' < t''))$. $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t' > t'') \supset t > t'')$, $\forall t \forall t'(t > t' \vee t = t' \vee t' > t)$ och $\forall t \exists t'\, t' > t$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t' > t \wedge t'' > t) \supset \exists t'''(t''' > t' \wedge t''' > t''))$.

Om S är konvergent bakåt och har gränser framåt, så är S konvergent framåt. $\forall t \forall t' \forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$ och $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset \exists t'''(t' < t''' \wedge t'' < t'''))$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$. $\forall t \forall t' \forall t''((t' > t \wedge t'' > t) \supset (t' > t'' \vee t' = t'' \vee t'' > t'))$ och $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t > t'') \supset \exists t'''(t' > t''' \wedge t'' > t'''))$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t > t'') \supset (t' > t'' \vee t' = t'' \vee t'' > t'))$.

Om S är konvergent framåt och har gränser bakåt, så är S konvergent bakåt. $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$ och $\forall t \forall t' \forall t''((t' <$

$t \wedge t'' < t) \supset \exists t'''(t''' < t' \wedge t''' < t''))$ medför t.ex. $\forall t \forall t' \forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$.

Om R är reflexiv och konvergent framåt, så har R gränser framåt. $\forall t t \leq t$ och $\forall t \forall t' \forall t''((t \leq t' \wedge t \leq t'') \supset (t' \leq t'' \vee t' = t'' \vee t'' \leq t'))$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t \leq t' \wedge t \leq t'') \supset \exists t'''(t' \leq t''' \wedge t'' \leq t'''))$. $\forall t t \geq t$ och $\forall t \forall t' \forall t''((t \geq t' \wedge t \geq t'') \supset (t' \geq t'' \vee t' = t'' \vee t'' \geq t'))$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t \geq t' \wedge t \geq t'') \supset \exists t'''(t' \geq t''' \wedge t'' \geq t'''))$.

Om R är reflexiv och konvergent bakåt, så har R gränser bakåt. $\forall t t \leq t$ och $\forall t \forall t' \forall t''((t' \leq t \wedge t'' \leq t) \supset (t' \leq t'' \vee t' = t'' \vee t'' \leq t'))$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t' \leq t \wedge t'' \leq t) \supset \exists t'''(t''' \leq t' \wedge t''' \leq t''))$. $\forall t t \geq t$ och $\forall t \forall t' \forall t''((t' \geq t \wedge t'' \geq t) \supset (t' \geq t'' \vee t' = t'' \vee t'' \geq t'))$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t' \geq t \wedge t'' \geq t) \supset \exists t'''(t''' \geq t' \wedge t''' \geq t''))$.

Om R är asymmetrisk, så är R irreflexiv. Om det finns en R-cirkel (en situation av följande form $t_1Rt_2 \wedge t_2Rt_3 \wedge \ldots \wedge t_{n-1}Rt_n \wedge t_nRt_1$) och R är transitiv, så är R inte irreflexiv. Om det finns en R-cirkel och R är transitiv, så är R inte asymmetrisk. Om det finns en R-cirkel och R är irreflexiv, så är R inte transitiv. Om det finns en R-cirkel och R är asymmetrisk, så är R inte transitiv.

Antag att Q′ är konversen till Q, dvs. att x Q y omm y Q′ x. Då gäller det att om Q har en av de formella egenskaperna reflexivitet, transitivitet, täthet eller jämförbarhet, så har också Q′ denna egenskap; och tvärt om. Vidare gäller det att om Q är ändlös bakåt, så är Q′ ändlös framåt, och tvärtom; om Q har gränser framåt, så har Q′ gränser bakåt, och tvärtom; och om Q är konvergent bakåt, så är Q′ konvergent framåt, och tvärtom.

Bl.a. gäller följande fakta. $\forall t \forall t'(t' \geq t \equiv t \leq t')$ och $\forall t t \leq t$ medför $\forall t t \geq t$. Med andra ord, om relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* är reflexiv och relationen *inträffar samtidigt med eller senare än* är konversen till denna relation, så är också relationen *inträffar samtidigt med eller senare än* reflexiv.

$\forall t \forall t'(t' > t \equiv t < t')$ och $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t' < t'') \supset t < t'')$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t' > t'') \supset t > t'')$. Dvs. om relationen *inträffar tidigare än* är transitiv och relationen *inträffar senare än* är konversen till denna relation, så är också relationen *inträffare senare än* transitiv.

$\forall t \forall t'(t' \leq t \equiv t \geq t')$ och $\forall t \forall t'(t \geq t' \supset \exists t''(t \geq t'' \wedge t'' \geq t'))$ medför $\forall t \forall t'(t \leq t' \supset \exists t''(t \leq t'' \wedge t'' \leq t'))$. Med andra ord, om relationen *inträffar samtidigt med eller senare än* är tät och relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* är konversen till denna relation, så är också relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* tät.

$\forall t \forall t'(t' > t \equiv t < t')$ och $\forall t \forall t'(t > t' \vee t = t' \vee t' > t)$ medför $\forall t \forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$. Detta innebär att om relationen *inträffar senare än* är jämförbar och relationen *inträffar tidigare än* är konversen till denna relation, så är också relationen *inträffar tidigare än* jämförbar.

$\forall t \forall t'(t < t' \equiv t' > t)$ och $\forall t \exists t' t' > t$ medför $\forall t \exists t' t < t'$. Dvs. om relationen *inträffar senare än* är ändlös bakåt och relationen *inträffar tidigare än* är konversen till denna relation, så är relationen *inträffar tidigare än* ändlös framåt.

$\forall t \forall t' \forall t''((t' > t \wedge t'' > t) \supset \exists t'''(t''' > t' \wedge t''' > t''))$ och $\forall t \forall t'(t < t' \equiv t' > t)$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset \exists t'''(t' < t''' \wedge t'' < t'''))$. Med andra ord, om relationen *inträffar senare än* har gränser bakåt och relationen *inträffar tidigare än* är konversen till denna relation, så har relationen *inträffar tidigare än* gränser framåt.

$\forall t \forall t' \forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset \exists t'''(t''' < t' \wedge t''' < t''))$ och $\forall t \forall t'(t' > t \equiv t < t')$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t > t'') \supset \exists t'''(t' > t''' \wedge t'' > t'''))$. Dvs. om relationen *inträffar tidigare än* har gränser bakåt och relationen *inträffar senare än* är konversen till denna relation, så har relationen *inträffar senare än* gränser framåt.

$\forall t \forall t' \forall t''((t' > t \wedge t'' > t) \supset (t' > t'' \vee t' = t'' \vee t'' > t'))$ och $\forall t \forall t'(t < t' \equiv t' > t)$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$. Alltså gäller det att om relationen *inträffar senare än* är konvergent bakåt och relationen *inträffar tidigare än* är konversen till denna relation, så är relationen *inträffar tidigare än* konvergent framåt.

$\forall t \forall t' \forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$ och $\forall t \forall t'(t' > t \equiv t < t')$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t > t'') \supset (t' > t'' \vee t' = t'' \vee t'' > t'))$. Således gäller det att om relationen *inträffar tidigare än* är konvergent bakåt och relationen *inträffar senare än* är konversen till denna relation, så är relationen *inträffar senare än* konvergent framåt.

Kalla ”$\forall t \forall t'(t \mathrel{R} t' \equiv (t = t' \vee t \mathrel{S} t'))$” DefR. Def≤, $\forall t \forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$, är t.ex. sann omm (C=≤I), (C-<≤I) och (C-≤<I) är sanna (se tabell 2). Om DefR är sann, så är R reflexiv, tät, ändlös framåt och ändlös bakåt. Antag att DefR är sann. Då gäller följande. Om S är transitiv, så är R transitiv. Om S är jämförbar, så är R fullständig. Om S är konvergent framåt, så är R konvergent framåt. Om S är konvergent bakåt, så är R konvergent bakåt. Om S har gränser framåt, så har R gränser framåt. Om S har gränser bakåt, så har R gränser bakåt. Om R är fullständig, så är S jämförbar. Om R är konvergent framåt, så är S konvergent framåt. Om R är konvergent bakåt, så är S konvergent bakåt.

Bl.a. gäller följande fakta. $\forall t \forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ medför $\forall t\, t \leq t$, $\forall t \forall t'(t \leq t' \supset \exists t''(t \leq t'' \wedge t'' \leq t'))$, $\forall t \exists t' t \leq t'$ och $\forall t \exists t' t' \leq t$. Dvs. om Def≤ är sann, så är relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* reflexiv, tät, ändlös framåt och ändlös bakåt.

$\forall t\forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t\forall t'\forall t''((t < t' \wedge t' < t'') \supset t < t'')$ medför $\forall t\forall t'\forall t''((t \leq t' \wedge t' \leq t'') \supset t \leq t'')$. Med andra ord, om Def≤ är sann och relationen *inträffar tidigare än* är transitiv, så är relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* också transitiv.

$\forall t\forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t\forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$ medför $\forall t\forall t'(t \leq t' \vee t' \leq t)$. Således gäller det att om Def≤ är sann och relationen *inträffar tidigare än* är jämförbar, så är relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* fullständig.

$\forall t\forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t\forall t'\forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$ medför $\forall t\forall t'\forall t''((t' \leq t \wedge t'' \leq t) \supset (t' \leq t'' \vee t' = t'' \vee t'' \leq t'))$. Med andra ord, om Def≤ är sann och relationen *inträffar tidigare än* är konvergent bakåt, så är relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* konvergent bakåt.

$\forall t\forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t\forall t'\forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset \exists t'''(t' < t''' \wedge t'' < t'''))$ medför $\forall t\forall t'\forall t''((t \leq t' \wedge t \leq t'') \supset \exists t'''(t' \leq t''' \wedge t'' \leq t'''))$. Alltså gäller det att om Def≤ är sann och relationen *inträffar tidigare än* har gränser framåt, så har relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* gränser framåt.

$\forall t\forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t\forall t'(t \leq t' \vee t' \leq t)$ medför $\forall t\forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$. Dvs. om Def≤ är sann och relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* är fullständig, så är relationen *inträffar tidigare än* jämförbar.

$\forall t\forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t\forall t'\forall t''((t' \leq t \wedge t'' \leq t) \supset (t' \leq t'' \vee t' = t'' \vee t'' \leq t'))$ medför $\forall t\forall t'\forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$. Med andra ord, om Def≤ är sann och relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* är konvergent bakåt, så är relationen *inträffar tidigare än* konvergent bakåt.

F har SR-gränser bakåt (framåt) om och endast om F har RS-gränser bakåt (framåt).

F är SR-ändlös bakåt (framåt) om och endast om F är RS-ändlös bakåt (framåt).

Om F är >≥-ändlös bakåt och < är konversen till > (och tvärt om) och ≤ är konversen till ≥ (och tvärt om), så är F <≤-ändlös framåt (och tvärt om). Om F är <≤-ändlös bakåt och < är konversen till > (och tvärt om) och ≤ är konversen till ≥ (och tvärt om), så är F >≥-ändlös framåt (och tvärt om).

Om F uppfyller villkoret ≤<-permutation bakåt och < är konversen till > (och tvärt om) och ≤ är konversen till ≥ (och tvärt om), så uppfyller F villkoret ≥>-permutation framåt (och tvärt om). Om F uppfyller villkoret ≥>-permutation bakåt och < är konversen till > (och tvärt om) och ≤ är konversen till ≥ (och tvärt om), så uppfyller F villkoret ≤<-permutation framåt (och tvärt om). Om F uppfyller villkoret <≤-permutation bakåt och < är konversen till > (och tvärt om) och ≤ är konversen till ≥ (och tvärt om), så uppfyller F villkoret >≥-permutation framåt (och tvärt om). Om F uppfyller villkoret >≥-permutation bakåt och < är konversen till > (och tvärt om) och ≤ är konversen till ≥ (och tvärt om), så uppfyller F villkoret <≤-permutation framåt (och tvärt om).

3.6. Klasser av ramar och deras logik

De villkor på ramar vi har tagit upp i avsnitt 3.4 kan användas för att tala om olika klasser av ramar. Vi skall säga att **F**(C_1, …, C_n) är klassen av alla ramar som uppfyller villkoren C_1, …, C_n. **F**(C-<4, C-<PC) är t.ex. klassen av alla ramar som uppfyller villkoren C-<4 och C-<PC.

Klassen av alla satser i TS som är giltiga i en klass av ramar **F**, S(**F**), kallas **F**’s logik eller det logiska systemet som är baserat på **F**. S(**F**) = {A ∈ TS : $\Vdash_{\mathbf{F}}$ A}. S(**F**(C-<4, C-<PC)) är t.ex. klassen av alla satser som är giltiga i klassen av alla ramar som uppfyller villkoren C-<4 och C-<PC.

Genom att införa vissa villkor på våra ramar kan vi alltså definiera en mängd logiska system. Dessa system är semantiskt karaktäriserade. I nästa sektion skall vi utveckla ett antal semantiska tablåsystem som svarar mot dessa.

4. Bevisteori

Vi skall nu undersöka ett antal semantiska tablåsystem som bl.a. kan användas för att avgöra om en sats är logiskt sann, logiskt falsk eller logiskt kontingent, om en mängd satser är konsistent eller inkonsistent och om ett argument är giltigt eller ogiltigt.

Evert Beth, se Beth (1955) och Beth (1959), ss. 186–201, 267–293, och 444–463, tycks ha varit den förste logiker som utvecklade ett semantiskt tablåsystem. Enligt Smullyan (1968) s. 3 kommer idén ursprungligen från Gerhard Gentzen (se Gentzen (1935) och Gentzen (1935b)). För mer information om semantiska tablåsystem, se t.ex. D’Agostino et al. (1999), Fitting & Mendelsohn (1998), Garson (2006), Jeffrey (1967), Priest (2008), Rönnedal (2012), (2012b) och Smullyan (1968).

Grundläggande begrepp, såsom träd, semantisk tablå, gren, öppen och sluten gren, teorem, bevis osv. definieras på vanligt sätt, se t.ex. Rönnedal

(2012b), s. 131. $\vdash_S$ B innebär att B är ett teorem i systemet S; och $\mathbf{\Sigma} \vdash_S$ B innebär att B är härledbar från $\mathbf{\Sigma}$ i S.

Vi skall börja med att titta på ett antal semantiska tablåregler. Sedan skall vi se hur dessa kan användas för att skapa en mängd semantiska tablåsystem. Slutligen nämner jag ett antal teorem som kan bevisas i våra system.

4.1. Tablåregler

Det finns tre olika typer av tablåregler: satslogiska regler, (grundläggande) temporala regler och (temporala) tillgänglighetsregler. De två första ingår i alla tablåsystem. Olika tablåsystem innehåller emellertid olika tillgänglighetsregler. Genom att lägga till tillgänglighetsregler kan vi skapa starkare system. Dessa regler svarar mot de semantiska villkor som vi diskuterade i sektion 3.4. Tillgänglighetsreglerna kan delas in i två grupper, de som svarar mot olika formella egenskaper hos de olika tillgänglighetsrelationerna, och de som svarar mot olika relationer mellan tillgänglighetsrelationerna.

4.1.1. Satslogiska regler

De satslogiska reglerna är de gamla vanliga som brukar användas i semantiska tablåsystem (se t.ex. Rönnedal (2012b), s. 132, för en genomgång).

4.1.2. Grundläggande temporala regler

G	H	F	P
GA, i	HA, i	FA, i	PA, i
j > i	j < i	↓	↓
↓	↓	j > i	j < i
A, j	A, j	A, j	A, j
		där j är ny	där j är ny
¬G	¬H	¬F	¬P
¬GA, i	¬HA, i	¬FA, i	¬PA, i
↓	↓	↓	↓
F¬A, i	P¬A, i	G¬A, i	H¬A, i

Tabell 3

[G]	[H]	⟨F⟩	⟨P⟩
$[G]A, i$ $j \geq i$ $\downarrow$ A, j	$[H]A, i$ $j \leq i$ $\downarrow$ A, j	$\langle F\rangle A, i$ $\downarrow$ $j \geq i$ A, j där j är ny	$\langle P\rangle A, i$ $\downarrow$ $j \leq i$ A, j där j är ny
¬[G]	**¬[H]**	**¬⟨F⟩**	**¬⟨P⟩**
$\neg[G]A, i$ $\downarrow$ $\langle F\rangle\neg A, i$	$\neg[H]A, i$ $\downarrow$ $\langle P\rangle\neg A, i$	$\neg\langle F\rangle A, i$ $\downarrow$ $[G]\neg A, i$	$\neg\langle P\rangle A, i$ $\downarrow$ $[H]\neg A, i$

Tabell 4

Id(I)	Id(II)	Id	
$A(i)$ $i = j$ $\downarrow$ $A(j)$	$A(i)$ $j = i$ $\downarrow$ $A(j)$	$\ldots i \ldots$ $\downarrow$ $i = i$	

Tabell 5

De grundläggande identitetsreglerna är redundanta i system som inte innehåller några övriga ”identitetsregler” (regler som innehåller indentitets-tecknet).

4.1.3. Temporala tillgänglighetsregler

$T\text{-}{<}4$	$T\text{-}{>}4$	$T\text{-}{\leq}4$	$T\text{-}{\geq}4$
$i < j$ $j < k$ $\downarrow$ $i < k$	$i > j$ $j > k$ $\downarrow$ $i > k$	$i \leq j$ $j \leq k$ $\downarrow$ $i \leq k$	$i \geq j$ $j \geq k$ $\downarrow$ $i \geq k$

Tabell 6

$T\text{-}{<}PD$	$T\text{-}{>}PD$	$T\text{-}{\leq}PD$	$T\text{-}{\geq}PD$
j $\downarrow$ $k < j$ där k är ny	j $\downarrow$ $k > j$ där k är ny	j $\downarrow$ $k \leq j$ där k är ny	j $\downarrow$ $k \geq j$ där k är ny

Tabell 7

T-<T	T->T	T-≤T	T-≥T
…j…	…j…	…j…	…j…
↓	↓	↓	↓
j < j	j > j	j ≤ j	j ≥ j

Tabell 8

T-<B	T->B	T-≤B	T-≥B
i < j	i > j	i ≤ j	i ≥ j
↓	↓	↓	↓
j < i	j > i	j ≤ i	j ≥ i

Tabell 9

Reglerna T-<T och T->T är intuitivt inte särskilt plausibla, eftersom de svarar mot villkoren att relationerna *tidigare än* och *senare än* är reflexiva. Tvärt om förefaller dessa relationer vara irreflexiva. Inte heller reglerna T-<B, T->B, T-≤B eller T-≥B är särskilt tilltalande rent intuitivt, eftersom de svarar mot villkoren att de olika temporala relationerna är symmetriska, när åtminstone de två första i själva verket förefaller vara asymmetriska. Anledningen till att jag har inkluderat dessa är att om tiden är cirkulär och transitiv, så följer det att den också är reflexiv och symmetrisk. Och det tycks inte alls vara omöjligt att föreställa sig att tiden skulle kunna vara cirkulär. Är tiden linjär, är de emellertid inte rimliga.

T-≤F	T-≥F	T-<C	T->C
...i, j...	...i, j...	…i, j…	…i, j…
↙↘	↙↘	↙↓↘	↙↓↘
i ≤ j j ≤ i	i ≥ j j ≥ i	i < j i = j j < i	i > j i = j j > i

Tabell 10

T-<DE	T->DE	T-≤DE	T-≥DE
i < j	i > j	i ≤ j	i ≥ j
↓	↓	↓	↓
i < k	i > k	i ≤ k	i ≥ k
k < j	k > j	k ≤ j	k ≥ j
där k är ny	där k är ny	där k är ny	där k är ny

Tabell 11

T-≤PC	T-<PC	T-≥PC	T->PC
j ≤ i	j < i	j ≥ i	j > i
k ≤ i	k < i	k ≥ i	k > i
↙↓↘	↙↓↘	↙↓↘	↙↓↘
j ≤ k j = k k ≤ j	j < k j = k k < j	j ≥ k j = k k ≥ j	j > k j = k k > j

Tabell 12

T-<LB	T->LB	T-≤LB	T-≥LB
j < i	j > i	j ≤ i	j ≥ i
k < i	k > i	k ≤ i	k ≥ i
↓	↓	↓	↓
l < j	l > j	l ≤ j	l ≥ j
l < k	l > k	l ≤ k	l ≥ k
där l är ny	där l är ny	där l är ny	där l är ny

Tabell 13

T-<>C	T-><C	T-≤≥C	T-≥≤C
i < j	i > j	i ≤ j	i ≥ j
↓	↓	↓	↓
j > i	j < i	j ≥ i	j ≤ i

Tabell 14

T-=≤I	T-=≥I	T-≤<I	T-≥>I
i = j	i = j	i ≤ j	i ≥ j
↓	↓	↙↘	↙↘
i ≤ j	i ≥ j	i = j i < j	i = j i > j

Tabell 15

T-<≤I	T->≥I	T-<≤PD	T->≥PD
i < j	i > j	…i…	…i…
↓	↓	↓	↓
i ≤ j	i ≥ j	j < i	j > i
		j ≤ i	j ≥ i
		där j är ny	där j är ny

Tabell 16

T-<≤4	T->≥4	T-<≤LB	T->≥LB
$i < j$ $j \leq k$ ↓ $i < k$	$i > j$ $j \geq k$ ↓ $i > k$	$j < i$ $k \leq i$ ↓ $l \leq j$ $l < k$ där l är ny	$j > i$ $k \geq i$ ↓ $l \geq j$ $l > k$ där l är ny

Tabell 17

T-≤<PP	T-≥>PP	T-<≤PP	T->≥PP
$k < i$ $i \leq j$ ↓ $k \leq l$ $l < j$ där l är ny	$k > i$ $i \geq j$ ↓ $k \geq l$ $l > j$ där l är ny	$k \leq i$ $i < j$ ↓ $k < l$ $l \leq j$ där l är ny	$k \geq i$ $i > j$ ↓ $k > l$ $l \geq j$ där l är ny

Tabell 18

4.2. Tablåsystem

Ett tablåsystem är en mängd tablåregler. Ett (normalt) temporalt tablåsystem inkluderar alla satslogiska regler och alla grundläggande temporala regler. Det minimala (normala) temporala tablåsystemet kallas ”T”. Genom att lägga till någon delmängd av de tillgänglighetsregler som introducerades i avsnitt 4.1.3 får vi en extension av T. Vi använder följande konventioner för att benämna olika system. ”$TT_1 \ldots T_n$”, där T_1, …, T_n är en lista (möjligtvis tom) på temporala tillgänglighetsregler, står för ett temporalt tablåsystem som innehåller tillgänglighetsreglerna T_1, …, och T_n. ”Redundanta” bokstäver i namnen utelämnas. T<4<PC är t.ex. ett namn på det temporala tablåsystem som innehåller tillgänglighetsreglerna T-<4 och T-<PC.

Om S är ett tablåsystem, så är S’s logik, eller den logik som är baserad på S, L(S), mängden av alla satser i TS som kan bevisas i S, dvs. $L(S) = \{A \in TS : \vdash_S A\}$. L(T<4<PC) är t.ex. mängden av alla satser som kan bevisas i systemet T<4<PC, dvs. i det temporala tablåsystem som innehåller alla grundläggande temporala regler och tillgänglighetsreglerna T-<4 och T-<PC.

4.3. Exempel på teorem

I det här avsnittet skall vi nämna några teorem i olika temporala tablåsystem. Bevisen är ofta relativt enkla och utelämnade. (Vill man lära sig att handskas med systemen i den här uppsatsen kan det vara en bra övning att bevisa alla satser i det här avsnittet.)

Teorem. (i) Alla satser i tabell 19 är teorem i alla temporala tablåsystem. (ii) Byt ut varje förekomst av G mot en förekomst av H och varje förekomst av F mot en förekomst av P i tabell 19. Varje sats som är resultatet av en sådan substitution är ett teorem i varje temporalt tablåsystem. (iii) Byt ut varje förekomst av G mot en förekomst av [G] och varje förekomst av F mot en förekomst av ⟨F⟩ i tabell 19. Varje sats som är resultatet av en sådan substitution är ett teorem i varje temporalt tablåsystem. (iv) Byt ut varje förekomst av G mot en förekomst av [H] och varje förekomst av F mot en förekomst av ⟨P⟩ i tabell 19. Varje sats som är resultatet av en sådan substitution är ett teorem i varje temporalt tablåsystem.

$G(A \wedge B) \equiv (GA \wedge GB)$	$G(A \equiv B) \supset (GA \equiv GB)$
$(GA \vee GB) \supset G(A \vee B)$	$G(A \equiv B) \supset (FA \equiv FB)$
$F(A \wedge B) \supset (FA \wedge FB)$	$G(A \equiv B) \supset (\neg FA \equiv \neg FB)$
$F(A \vee B) \equiv (FA \vee FB)$	$(G(A \vee B) \wedge \neg FB) \supset GA$
$\neg F(A \vee B) \equiv (\neg FA \wedge \neg FB)$	$((GA \wedge GB) \wedge G((A \wedge B) \supset C)) \supset GC$
$(\neg FA \vee \neg FB) \supset \neg F(A \wedge B)$	$(G(A \supset (B \vee C)) \wedge (\neg FB \wedge \neg FC)) \supset \neg FA$
$(GA \wedge G(A \supset B)) \supset GB$	$((GA \vee GB) \wedge G((A \vee B) \supset C)) \supset GC$
$G(A \supset B) \supset (FA \supset FB)$	$(GA \wedge G(A \supset (B \wedge C)) \supset (GB \wedge GC)$
$(G(A \supset B) \wedge FA) \supset FB$	$(\neg FC \wedge G((A \vee B) \supset C)) \supset (\neg FA \wedge \neg FB)$
$G(A \supset B) \supset (\neg FB \supset \neg FA)$	$((FA \vee FB) \wedge G((A \vee B) \supset C)) \supset FC$
$(G(A \supset B) \wedge \neg FB) \supset \neg FA$	$(G(A \supset (B \wedge C)) \wedge (\neg FB \vee \neg FC)) \supset \neg FA$
$GA \vee (FA \wedge F\neg A) \vee \neg FA$	$(G(A \supset B) \wedge G(B \supset C)) \supset G(A \supset C)$

Tabell 19. Teorem i alla system

$(GA \wedge GB) \supset \langle F\rangle(A \wedge B)$	$[G](A \supset B) \supset ([G]A \supset FB)$
$([G]A \wedge [G]B) \supset F(A \wedge B)$	$([G]A \wedge [G](A \supset B)) \supset FB$
$(GA \vee GB) \supset \langle F\rangle(A \vee B)$	$[G]A \supset ([G](A \supset B) \supset FB)$
$([G]A \vee [G]B) \supset F(A \vee B)$	$[G](A \supset B) \supset (\neg FB \supset \neg[G]A)$
$[G](A \wedge B) \supset (\langle F\rangle A \wedge \langle F\rangle B)$	$(\neg FB \wedge [G](A \supset B)) \supset \neg[G]A$
$[G](A \wedge B) \supset (FA \wedge FB)$	$\neg FB \supset ([G](A \supset B) \supset \neg[G]A)$
$[G](A \supset B) \supset (GA \supset \langle F\rangle B)$	$[G](A \supset B) \supset (\neg\langle F\rangle B \supset \neg GA)$
$(GA \wedge [G](A \supset B)) \supset \langle F\rangle B$	$(\neg\langle F\rangle B \wedge [G](A \supset B)) \supset \neg GA$
$GA \supset ([G](A \supset B) \supset \langle F\rangle B)$	$\neg\langle F\rangle B \supset ([G](A \supset B) \supset \neg GA)$

Tabell 20. Teorem i T->≥PD

$[G](A \wedge B) \supset (GA \wedge GB)$	$[G](A \equiv B) \supset (GA \equiv GB)$
$([G]A \vee [G]B) \supset G(A \vee B)$	$[G](A \equiv B) \supset (FA \equiv FB)$
$([G]A \wedge [G]B) \supset G(A \wedge B)$	$[G](A \equiv B) \supset (\neg FA \equiv \neg FB)$
$F(A \wedge B) \supset (\langle F\rangle A \wedge \langle F\rangle B)$	$(GA \wedge [G](A \supset B)) \supset GB$
$F(A \vee B) \supset (\langle F\rangle A \vee \langle F\rangle B)$	$[G](A \supset B) \supset (GA \supset GB)$
$(FA \vee FB) \supset \langle F\rangle(A \vee B)$	$(FA \wedge [G](A \supset B)) \supset FB$
$\neg\langle F\rangle(A \vee B) \supset (\neg FA \wedge \neg FB)$	$[G](A \supset B) \supset (FA \supset FB)$
$(\neg\langle F\rangle A \vee \neg\langle F\rangle B) \supset \neg F(A \wedge B)$	$(\neg FB \wedge [G](A \supset B)) \supset \neg FA$
$(\neg\langle F\rangle A \wedge \neg\langle F\rangle B) \supset \neg F(A \vee B)$	$[G](A \supset B) \supset (\neg FB \supset \neg FA)$

Tabell 21. Teorem i T->≥I

$[G](A \supset B) \supset ([G]A \supset GB)$
$[G](A \supset B) \supset (FA \supset \langle F\rangle B)$
$[G](A \supset B) \supset (\neg\langle F\rangle B \supset \neg FA)$
$(G(A \vee B) \wedge \neg\langle F\rangle B) \supset GA$
$[G]((A \vee B) \supset C) \supset ((GA \vee GB) \supset GC)$
$[G]((A \vee B) \supset C) \supset ((FA \vee FB) \supset FC)$
$[G]((A \vee B) \supset C) \supset (\neg FC \supset (\neg FA \wedge \neg FB))$
$[G](A \supset (B \vee C)) \supset (FA \supset (FB \vee FC))$
$[G](A \supset (B \vee C)) \supset ((\neg FB \wedge \neg FC) \supset \neg FA)$
$[G]((A \wedge B) \supset C) \supset ((GA \wedge GB) \supset GC)$
$[G](A \supset (B \wedge C)) \supset (GA \supset (GB \wedge GC))$
$[G](A \supset (B \wedge C)) \supset (FA \supset (FB \wedge FC))$
$[G](A \supset (B \wedge C)) \supset ((\neg FB \vee \neg FC) \supset \neg FA)$
$(G(A \vee B) \wedge ([G](A \supset C) \wedge [G](B \supset C))) \supset GC$
$(G(A \vee B) \wedge ([G](A \supset C) \wedge [G](B \supset D))) \supset G(C \vee D)$
$(GA \wedge ([G](A \supset B) \wedge [G](A \supset C))) \supset (GB \wedge GC)$
$(G(A \wedge B) \wedge ([G](A \supset C) \vee [G](B \supset D))) \supset G(C \vee D)$
$(GA \wedge ([G](A \supset B) \vee [G](A \supset C))) \supset G(B \vee C)$
$(G(A \wedge B) \wedge ([G](A \supset C) \wedge [G](B \supset D))) \supset (GC \wedge GD)$

Tabell 22. Teorem i T->≥I

$[G](A \supset B) \supset (GA \supset FB)$
$(GA \wedge [G](A \supset B)) \supset FB$
$[G](A \supset B) \supset (\neg FB \supset \neg GA)$
$(FB \wedge [G](A \supset B)) \supset \neg GA$
$\neg(G(A \vee B) \wedge (\neg\langle F\rangle A \wedge \neg\langle F\rangle B))$
$[G]((A \vee B) \supset C) \supset ((GA \vee GB) \supset FC)$

$[G]((A \vee B) \supset C) \supset (\neg FC \supset (\neg GA \wedge \neg GB))$
$[G](A \supset (B \vee C)) \supset (GA \supset (FB \vee FC))$
$[G](A \supset (B \vee C)) \supset ((\neg FB \wedge FC) \supset \neg GA)$
$[G]((A \wedge B) \supset C) \supset ((GA \wedge GB) \supset FC)$
$[G]((A \wedge B) \supset C) \supset (\neg FC \supset (\neg GA \vee \neg GB))$
$[G]((A \wedge B) \supset C) \supset (\neg FC \supset (F\neg A \vee F\neg B))$
$[G](A \supset (B \wedge C)) \supset (GA \supset (FB \wedge FC))$
$[G](A \supset (B \wedge C)) \supset ((\neg FB \vee \neg FC) \supset \neg GA)$
$[G](A \supset (B \wedge C)) \supset ((\neg FB \vee \neg FC) \supset \neg GA)$
$(G(A \vee B) \wedge ([G](A \supset C) \wedge [G](B \supset C))) \supset FC$
$(G(A \vee B) \wedge ([G](A \supset C) \wedge [G](B \supset D))) \supset (FC \vee FD)$
$(GA \wedge ([G](A \supset B) \wedge [G](A \supset C))) \supset (FB \wedge FC)$
$(G(A \wedge B) \wedge ([G](A \supset C) \vee [G](B \supset D))) \supset (FC \vee FD)$
$(GA \wedge ([G](A \supset B) \vee [G](A \supset C))) \supset (FB \vee FC)$
$(G(A \wedge B) \wedge ([G](A \supset C) \wedge [G](B \supset D))) \supset (FC \wedge FD)$

Tabell 23. Teorem i T->≥PD

Teorem. Byt ut varje förekomst av G mot H, varje förekomst av [G] mot [H], varje förekomst av F mot P, och varje förekomst av ⟨F⟩ mot ⟨P⟩ i tabell 20-23. Då gäller det att (i) varje sats som är ett resultat av en sådan substitution i tabell 20 och 23 är ett teorem i T-<≤PD, (ii) varje sats som är ett resultat av en sådan substitution i tabell 21 och 22 är ett teorem i T-<≤I.

System	Teorem
T-<4	$HA \supset HHA$, $PPA \supset PA$
T->4	$GA \supset GGA$, $FFA \supset FA$
T-≤4	$[H]A \supset [H][H]A$, $\langle P\rangle\langle P\rangle A \supset \langle P\rangle A$
T-≥4	$[G]A \supset [G][G]A$, $\langle F\rangle\langle F\rangle A \supset \langle F\rangle A$
T-<D	$HA \supset PA$, $\neg(HA \wedge H\neg A)$
T->D	$GA \supset FA$, $\neg(GA \wedge G\neg A)$
T-≤D	$[H]A \supset \langle P\rangle A$, $\neg([H]A \wedge [H]\neg A)$
T-≥D	$[G]A \supset \langle F\rangle A$, $\neg([G]A \wedge [G]\neg A)$
T-≤T	$[H]A \supset A$, $A \supset \langle P\rangle A$
T-≥T	$[G]A \supset A$, $A \supset \langle F\rangle A$
T-<DE	$PA \supset PPA$, $HHA \supset HA$, $(A \vee H(\perp \vee HB)) \supset (A \vee HB)$
T->DE	$FA \supset FFA$, $GGA \supset GA$, $(A \vee G(\perp \vee GB)) \supset (A \vee GB)$

T-≤DE	⟨P⟩A ⊃ ⟨P⟩⟨P⟩A, [H][H]A ⊃ [H]A
T-≥DE	⟨F⟩A ⊃ ⟨F⟩⟨F⟩A, [G][G]A ⊃ [G]A
T-<LB	PHA ⊃ HPA
T->LB	FGA ⊃ GFA
T-≤LB	⟨P⟩[H]A ⊃ [H]⟨P⟩A
T-≥LB	⟨F⟩[G]A ⊃ [G]⟨F⟩A
T-<PC	(PA ∧ PB) ⊃ (P(A ∧ B) ∨ P(A ∧ PB) ∨ P(PA ∧ B))
	(H(A ∨ B) ∧ H(A ∨ HB) ∧ H(HA ∨ B)) ⊃ (HA ∨ HB)
	H((A ∧ HA) ⊃ B) ∨ H((B ∧ HB) ⊃ A)
	P(HB∧¬A)⊃H(A⊃(HA⊃B)), H(A⊃(HA⊃B))∨H(HB⊃A)
T->PC	(FA ∧ FB) ⊃ (F(A ∧ B) ∨ F(A ∧ FB) ∨ F(FA ∧ B))
	(G(A ∨ B) ∧ G(A ∨ GB) ∧ G(GA ∨ B)) ⊃ (GA ∨ GB)
	G((A ∧ GA) ⊃ B) ∨ G((B ∧ GB) ⊃ A)
	F(GB∧¬A)⊃G(A⊃(GA⊃B)), (G(A⊃(GA⊃B))∨G(GB⊃A)
T-≤PC	(⟨P⟩A∧⟨P⟩B)⊃(⟨P⟩(A∧B)∨⟨P⟩(A∧⟨P⟩B)∨⟨P⟩(⟨P⟩A∧B))
	([H](A∨B)∧[H](A∨[H]B)∧[H]([H]A∨B))⊃([H]A∨[H]B)
T-≥PC	(⟨F⟩A∧⟨F⟩B)⊃(⟨F⟩(A∧B)∨⟨F⟩(A∧⟨F⟩B)∨⟨F⟩(⟨F⟩A∧B))
	([G](A∨B)∧[G](A∨[G]B)∧[G]([G]A∨B))⊃([G]A∨[G]B)

Tabell 24

System	Teorem
T-<>C	A ⊃ HFA, PGA ⊃ A
T-><C	A ⊃ GPA, FHA ⊃ A
T-≤≥C	A ⊃ [H]⟨F⟩A, ⟨P⟩[G]A ⊃ A
T-≥≤C	A ⊃ [G]⟨P⟩A, ⟨F⟩[H]A ⊃ A
T-=≤I	[H]A ⊃ A, A ⊃ ⟨P⟩A
T-=≥I	[G]A ⊃ A, A ⊃ ⟨F⟩A
T-<≤I	[H]A ⊃ HA, PA ⊃ ⟨P⟩A
T->≥I	[G]A ⊃ GA, FA ⊃ ⟨F⟩A
T-≤<I	⟨P⟩A ⊃ (A ∨ PA), (A ∧ HA) ⊃ [H]A
T-≥>I	⟨F⟩A ⊃ (A ∨ FA), (A ∧ GA) ⊃ [G]A
T-<≤4	HA ⊃ [H]HA, ⟨P⟩PA ⊃ PA
T->≥4	GA ⊃ [G]GA, ⟨F⟩FA ⊃ FA
T-<≤PD	HA ⊃ ⟨P⟩A, [H]A ⊃ PA
T->≥PD	GA ⊃ ⟨F⟩A, [G]A ⊃ FA
T-≤<PP	H[H]A ⊃ [H]HA, ⟨P⟩PA ⊃ P⟨P⟩A
T-≥>PP	G[G]A ⊃ [G]GA, ⟨F⟩FA ⊃ F⟨F⟩A
T-<≤PP	[H]HA ⊃ H[H]A, P⟨P⟩A ⊃ ⟨P⟩PA

T->≥PP	$[G]GA \supset G[G]A$, $F\langle F\rangle A \supset \langle F\rangle FA$
T-<≤LB	$P[H]A \supset [H]PA$, $\langle P\rangle HA \supset H\langle P\rangle A$
T->≥LB	$F[G]A \supset [G]FA$, $\langle F\rangle GA \supset G\langle F\rangle A$

Tabell 25

Här följer några fler teorem i lite olika system.

Om S innehåller T-≥T och T->≥4, så är $G[G]A \supset [G]GA$ och $\langle F\rangle FA \supset F\langle F\rangle A$ teorem i S. Om S innehåller T-≤T och T-<≤4, så är $H[H]A \supset [H]HA$ och $\langle P\rangle PA \supset P\langle P\rangle A$ teorem i S.

Om S innehåller T->≥I, T-=≥I (eller T-≥T) och T-≥>I, så är $G[G]A \supset [G]GA$, $\langle F\rangle FA \supset F\langle F\rangle A$, $[G]GA \supset G[G]A$ och $F\langle F\rangle A \supset \langle F\rangle FA$ teorem i S. Om S innehåller T-<≤I, T-=≤I (eller T-≤T) och T-≤<I, så är $H[H]A \supset [H]HA$, $\langle P\rangle PA \supset P\langle P\rangle A$, $[H]HA \supset H[H]A$ och $P\langle P\rangle A \supset \langle P\rangle PA$ teorem i S.

Om S innehåller T-≥T, T->≥I och T-≥>I, så är $[G]A \equiv (A \wedge GA)$ och $\langle F\rangle A \equiv (A \vee FA)$ teorem i S. Om S innehåller T-≤T, T-<≤I och T-≤<I, så är, $[H]A \equiv (A \wedge HA)$ och $\langle P\rangle A \equiv (A \vee PA)$ teorem i S.

Om S innehåller T->4, T->LB och T-><C, så är $(FA \wedge FB) \supset F(PA \wedge PB)$ och $G(HA \vee HB) \supset (GA \vee GB)$ teorem i S. Om S innehåller T-<4, T-<LB och T-<>C, så är $(PA \wedge PB) \supset P(FA \wedge FB)$ och $H(GA \vee GB) \supset (HA \vee HB)$ teorem i S.

Om S innehåller T-<C och T-<4, så är $H(HA \supset HB) \vee H(HB \supset HA)$ ett teorem i S. Om S innehåller T->C och T->4, så är $G(GA \supset GB) \vee G(GB \supset GA)$ ett teorem i S.

Om S innehåller T-><C och T->PC, så är $FA \supset G(PA \vee A \vee FA)$ och $F(HA \wedge A \wedge GA) \supset GA$ teorem i S. Om S innehåller T-<>C och T-<PC, så är $PA \supset H(FA \vee A \vee PA)$ och $P(HA \wedge A \wedge GA) \supset HA$ teorem i S.

Om S innehåller T-<>C, T-><C och T->PC, så är $PFA \supset (PA \vee A \vee FA)$, $(HA \wedge A \wedge GA) \supset HGA$ teorem i S. Om S innehåller T-<>C, T-><C och T-<PC, så är $FPA \supset (PA \vee A \vee FA)$, $(HA \wedge A \wedge GA) \supset GHA$ teorem i S.

Om S innehåller T-<>C och T->4, så är $FA \supset HFA$ och $PGA \supset GA$ teorem i S. Om S innehåller T-><C och T-<4, så är $PA \supset GPA$ och $FHA \supset HA$ teorem i S.

Om S innehåller T->PD, T->4 och T-><C, så är $FA \supset FPA$ och $GHA \supset GA$ teorem i S. Om S innehåller T-<PD, T-<4 och T-<>C, så är $PA \supset PFA$ och $HGA \supset HA$ teorem i S.

Om S innehåller T-<>C, T-><C och T->PC, så är $(HA \wedge A \wedge GA) \supset HGA$ och $PFA \supset (PA \vee A \vee FA)$ teorem i S. Om S innehåller T-<>C, T-><C och T-<PC, så är $(HA \wedge A \wedge GA) \supset GHA$ och $FPA \supset (PA \vee A \vee FA)$ teorem i S.

Om S innehåller T->PD, T-<>C, T-><C och T-<4 (eller T->4), så är $GHA \supset (HA \wedge A \wedge GA)$ och $(PA \vee A \vee FA) \supset FPA$ teorem i S. Om S innehåller T-<PD, T-<>C, T-><C och T-<4 (eller T->4), så är $HGA \supset (HA \wedge A \wedge GA)$ och $(PA \vee A \vee FA) \supset PFA$ teorem i S.

Om S innehåller T-<>C och T-><C, så är $PGA \supset GPA$ och $FHA \supset HFA$ teorem i S.

Om S innehåller T-<>C, T-><C, T->PD, T->PC och T->4 (eller T-<4), så är $GHA \supset HGA$ och $PFA \supset FPA$ teorem i S. Om S innehåller T-<>C, T-><C, T-<PD, T-<PC och T-<4 (eller T->4), så är $HGA \supset GHA$ och $FPA \supset PFA$ teorem i S.

Om S innehåller T-<>C, T-≥≤C, T->≥I, T-≤<I och T-≥T (eller T-=≥I), så är $P[G]A \supset [G]PA$ och $\langle F\rangle HA \supset H\langle F\rangle A$ teorem i S.

Om S innehåller T-<>C, T-><C, T->≥I, T-≥>I och T-≥T (eller T-=≥I), så är $P[G]A \supset [G]PA$ och $\langle F\rangle HA \supset H\langle F\rangle A$ teorem i S. Om S innehåller T-<>C, T-><C, T-<≤I, T-≤<I och T-≤T (eller T-≤I), så är $F[H]A \supset [H]FA$ och $\langle P\rangle GA \supset G\langle P\rangle A$ teorem i S.

Om S innehåller T-≤<I, T-≤T, T-<>C, T-><C, T->PC, T-<≤I, T->PD och T->4, så är $G[H]A \supset [H]GA$ och $\langle P\rangle FA \supset F\langle P\rangle A$ teorem i S. Om S innehåller T-≥>I, T-≥T, T-<>C, T-><C, T-<PC, T->≥I, T-<PD och T-<4, så är $H[G]A \supset [G]HA$ och $\langle F\rangle PA \supset P\langle F\rangle A$ teorem i S.

Om S innehåller T-≥T, T-<>C, T-><C, T->PD, T-≥>I, T->≥I, T->PC och T->4, så är $[G]HA \supset H[G]A$ och $P\langle F\rangle A \supset \langle F\rangle PA$ teorem i S. Om S innehåller T-≤T, T-<>C, T-><C, T-<PD, T-<≤I, T-≤<I, T-<PC och T-<4, så är $[H]GA \supset G[H]A$ och $F\langle P\rangle A \supset \langle P\rangle FA$ teorem i S.

Om S innehåller T-≤≥C, T-≥≤C, T-≤T, (eller T-≥T) och T-≥F (eller T-≤F), så är $[G][H]A \supset [H][G]A$ och $\langle P\rangle\langle F\rangle A \supset \langle F\rangle\langle P\rangle A$ teorem i S. Om S innehåller T-≤≥C, T-≥≤C, T-≤T, (eller T-≥T) och T-≤F (eller T-≥F), så är $[H][G]A \supset [G][H]A$ och $\langle F\rangle\langle P\rangle A \supset \langle P\rangle\langle F\rangle A$ teorem i S.

Om S innehåller T-<≤I, T-=≤I och T-<PC, så är $H([H]A \supset B) \vee H([H]B \supset A)$ ett teorem i S. Om S innehåller T->≥I, T-=≥I och T->PC, så är $G([G]A \supset B) \vee G([G]B \supset A)$ ett teorem i S.

5. Sundhets- och fullständighetsteorem

Låt S = TT-A_1…T-A_n vara ett normalt temporalt tablåsystem. Vi skall säga att S korresponderar med en klass av ramar, **F**, (och att **F** korresponderar med S) omm **F** = **F**(C-A_1, …, C-A_n).

S är (starkt) sunt i relation till (relativt till eller med avseende på) **F** omm $\Sigma \vdash_S A$ medför $\Sigma \Vdash_{\mathbf{F}} A$. S är (starkt) fullständigt i relation till (relativt till eller med avseende på) **F** omm $\Sigma \Vdash_{\mathbf{F}} A$ medför $\Sigma \vdash_S A$.

Vi skall nu visa att alla de temporala tablåsystem som vi kan konstruera med hjälp av våra tablåregler är sunda och fullständiga med avseende på deras semantik.

5.1. Sundhet

Låt M vara en modell och b en gren på en tablå. Då är b (eller mängden av satser på b) satisfierbar i M omm det finns en funktion, f, från de naturliga talen till mängden av alla tidpunkter T sådan att:

(i) A är sann i f(i) i M, för varje nod A, i på b;
(ii) om $i < j$ är på b, så är $f(i) < f(j)$ i M;
om $i > j$ är på b, så är $f(i) > f(j)$ i M;
om $i \leq j$ är på b, så är $f(i) \leq f(j)$ i M;
om $i \geq j$ är på b, så är $f(i) \geq f(j)$ i M;
om $i = j$ är på b, så är $f(i) = f(j)$ i M.

Om f uppfyller dessa villkor, skall vi säga att f visar att b är satisfierbar i M.

Lemma (Sundhetslemma). Låt b vara en gren på en tablå och M vara en (temporal) modell. Om b är satisfierbar i M och en tablåregel tillämpas på b, så produceras åtminstone en extension, b′, av b sådan att b′ är satisfierbar i M.

Bevis. Först visar vi att sundhetslemmat gäller för T. Sen utvidgar vi det till andra system. Detta görs på samma sätt som i olika modala system (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b) eller Priest (2008)). Jag kommer att gå igenom några tillgänglighetsregler. Utelämnade steg bevisas på liknande sätt. Stegen för de satslogiska reglerna är välkända. Stegen för de grundläggande temporala reglerna är enkla modifikationer av välkända bevis.

T-<4. Antag att vi har $i < j$ och $j < k$ på b, och att vi tillämpar T-<4 och får en utvidgad gren, b′, av b som innehåller $i < k$. Eftersom b är satisfierbar i M, gäller det att $f(i) < f(j)$ och $f(j) < f(k)$ i M. Det följer att $f(i) < f(k)$ i M, eftersom M uppfyller villkoret C-<4.

T->C. Antag att vi har i och j på b, och att vi tillämpar T->C på denna gren. Då får vi tre utvidgningar av b, som slutar med $i > j$, $i = j$, respektive $j > i$. Eftersom b är satisfierbar i M, så är f(i) och f(j) i M. M uppfyller villkoret C->C. Alltså gäller det att $f(i) > f(j)$, $f(i) = f(j)$ eller $f(j) > f(i)$ i M. Oavsett vilket så finns det en extension, b′, av b sådan att b′ är satisfierbar i M.

T-≤DE. Antag att vi har $i \leq j$ på b, och att vi tillämpar regeln T-≤DE och får $i \leq k$ och $k \leq j$, där k är ny på grenen. Eftersom b är satisfierbar i M så finns det en funktion f sådan att $f(i) \leq f(j)$ i M. Alltså finns det någon tidpunkt t i M, sådan att $f(i) \leq t$ och $t \leq f(j)$. För M uppfyller villkoret C-≤DE. Låt f′ vara likadan som f förutom att $f'(k) = t$. Då gäller det att $f'(i) \leq f'(k)$ och $f'(k) \leq f'(j)$. Eftersom k inte förekommer på b, visar f′ att b′ är satisfierbar i M.

T-<>C. Antag att vi har $i < j$ på b, och att vi tillämpar regeln T-<>C och får $j > i$. b är satisfierbar i M. Alltså finns det en funktion f sådan att $f(i) < f(j)$ i M. Det följer att $f(j) > f(i)$ i M, eftersom M uppfyller villkoret C-<>C.

T-=≤I. Antag att vi har $i = j$ på b, och att vi tillämpar regeln T-=≤I och får $i \leq j$. Då finns det en funktion f sådan att $f(i) = f(j)$ i M. Ty b är satisfierbar i M. Det följer att $f(i) \leq f(j)$, eftersom M uppfyller villkoret C-=≤I.

T-≤<I. Antag att vi har $i \leq j$ på b, och att vi tillämpar regeln T-≤<I på denna gren. Då får vi två utvidgningar av b, som slutar med $i = j$ (den vänstra grenen) respektive $i < j$ (den högra grenen). Eftersom b är satisfierbar i M, så har vi $f(i) \leq f(j)$ i M. Det följer att $f(i) = f(j)$ eller $f(i) < f(j)$ i M, eftersom M uppfyller villkoret C-≤<I. I det första fallet är den vänstra grenen satisfierbar i M; i det andra den högra grenen. Oavsett vilket så finns det en extension, b′, av b sådan att b′ är satisfierbar i M.

T-≤<PP. Antag att vi har $k < i$ och $i \leq j$ på b, och att vi tillämpar regeln T-≤<PP och får $k \leq l$ och $l < j$, där l är ny på grenen. Eftersom b är satisfierbar i M gäller det att $f(k) < f(i)$ och $f(i) \leq f(j)$ i M. Alltså gäller det att $f(k) \leq t$ och $t < f(j)$ för någon tidpunkt t i M. För M satisfierar villkoret C-≤<PP. Låt f′ vara likadan som f förutom att $f'(l) = t$. Det följer att $f'(k) \leq f'(l)$ och $f'(l) < f(j)$ i M. Eftersom l inte förekommer på b, så visar f′ att b′ är satisfierbar i M. ■

Teorem (Sundhetsteorem). Låt S vara ett av de temporala system som vi diskuterar i denna uppsats och låt **F** vara den klass av ramar som korresponderar med S. Då är S starkt sunt med avseende på **F**.

Bevis. När vi väl har etablerat sundhetslemmat kan vi bevisa sundhetsteoremet på samma sätt som för olika modala system (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b) eller Priest (2008)). ■

5.2. Fullständighet

Inducerad modell (Def.IM). Låt b vara en öppen (avslutad) gren i en semantisk tablå, och låt I vara mängden av alla tal på b. Vi skall säga att $i \sim j$ omm $i = j$, eller ”$i = j$” eller ”$j = i$” förekommer på b. $\sim$ är en ekvivalensrelation och $[i]$ är i’s ekvivalensklass (definierad av denna relation). Den temporala modell, M = <T, <, >, ≤, ≥, V>, som induceras från b definieras på följande sätt:

$T = \{t_{[i]}: i \in I\}$;
$t_{[i]} < t_{[j]}$ omm $i < j$ förekommer på b;
$t_{[i]} > t_{[j]}$ omm $i > j$ förekommer på b;
$t_{[i]} \leq t_{[j]}$ omm $i \leq j$ förekommer på b;
$t_{[i]} \geq t_{[j]}$ omm $i \geq j$ förekommer på b;
p är sann vid $t_{[i]}$, om p, i förekommer på b;
p är falsk vid $t_{[i]}$, om $\neg$p, i förekommer på b.

Om vårt tablåsystem inte innehåller några identitetsregler, reduceras ~ till identitet och [i] = i. Alltså kan vi i sådana system låta T vara $\{t_i: i \in I\}$ och göra oss av med ekvivalensklasserna. Notera också att $t_{[i]} = t_{[j]}$ omm i = j förekommer på b, givet definitionen av en inducerad modell och våra identitetsregler.

Lemma (Fullständighetslemma). Låt b vara en gren på en fullständig tablå och låt M vara en modell som induceras från b. Då gäller det att:
(i) Om A, i är på b, så är A sann i $t_{[i]}$, och
(ii) Om $\neg$A, i är på b, så är A falsk i $t_{[i]}$.

Bevis. Beviset är i allt väsentligt detsamma som för olika modala system (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b) eller Priest (2008)). Stegen för de satslogiska konnektiven och för de grundläggande temporala operatorerna är välkända eller modifikationer av välkända bevis. ■

Teorem (Fullständighetsteorem). Låt S vara ett av de system vi diskuterar i denna uppsats och låt **F** vara den klass av ramar som korresponderar med S. Då är S (starkt) fullständigt i relation till **F**.

Bevis. Beviset är i allt väsentligt detsamma som för olika modala system (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b) eller Priest (2008)).

De intressanta nya stegen är att vi måste visa att den modell som induceras från den öppna grenen, b, i varje fall är av rätt slag. Vi skall gå igenom några av alla steg. Övriga fall bevisas på liknande sätt.

C-<4. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$ och $t_{[j]} < t_{[k]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]}, t_{[k]} \in T$. Då förekommer i < j och j < k på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har T-<4 applicerats och vi har i < k på b. Det följer att $t_{[i]} < t_{[k]}$ [från Def.IM].

C-<PC. Antag att $t_{[j]} < t_{[i]}$ och $t_{[k]} < t_{[i]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]}, t_{[k]} \in T$. Då förekommer j < i och k < i på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har vi applicerat T-<PC och vi har j < k, j = k eller k < j på b. Om j = k är på b, så j

$\sim$ k; och om j $\sim$ k, så [j] = [k]. Det följer att $t_{[j]} < t_{[k]}$, $t_{[j]} = t_{[k]}$ eller $t_{[k]} < t_{[j]}$, vilket skulle bevisas [från Def.IM].

C-<LB. Antag att $t_{[j]} < t_{[i]}$ och $t_{[k]} < t_{[i]}$, där $t_{[i]}$, $t_{[j]}$, $t_{[k]} \in$ T. Då förekommer j < i och k < i på b [från Def.IM]. T-<LB har applicerats, eftersom b är fullständig. Alltså har vi l < j och l < k på b, där l är ny. Det följer att det finns en tidpunkt $t_{[l]}$ i T, sådan att $t_{[l]} < t_{[j]}$ och $t_{[l]} < t_{[k]}$ [från Def.IM].

C-<>C. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$, där $t_{[i]}$, $t_{[j]} \in$ T. Då har vi i < j på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig har T-<>C tillämpats. Således har vi j > i på b. Alltså kan vi sluta oss till att $t_{[j]} > t_{[i]}$ [från Def.IM].

C-=≤I. Antag att $t_{[i]} = t_{[j]}$, där $t_{[i]}$, $t_{[j]} \in$ T. Då är [i] = [j] och i $\sim$ j. Alltså, i = j, eller också förekommer ”i = j” eller ”j = i” på b. I samtliga fall har vi i = j på b tack vare våra identitetsregler. Eftersom b är fullständig, så har C-=≤I tillämpats och vi har i ≤ j på b. Det följer att $t_{[i]} \leq t_{[j]}$ [från Def.IM].

T-≤<I. Antag att $t_{[i]} \leq t_{[j]}$, där $t_{[i]}$, $t_{[j]} \in$ T. Då förekommer i ≤ j på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig har T-≤<I applicerats. Alltså har vi antingen i = j eller i < j på b. Om i = j är på b, så i $\sim$ j; och om i $\sim$ j, så [i] = [j]. Det följer att $t_{[i]} = t_{[j]}$ eller $t_{[i]} < t_{[j]}$, vilket skulle bevisas [från Def.IM].

C-<≤I. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$, där $t_{[i]}$, $t_{[j]} \in$ T. Då förekommer i < j på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har T-<≤I applicerats och vi har i ≤ j på b. Det följer att $t_{[i]} \leq t_{[j]}$ [från Def.IM].

C-<≤4. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$ och $t_{[j]} \leq t_{[k]}$, där $t_{[i]}$, $t_{[j]}$, $t_{[k]} \in$ T. Då har vi i < j och j ≤ k på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har T-<≤4 tillämpats och i < k förekommer på b. Det följer att $t_{[i]} < t_{[k]}$ [från Def.IM].

T-≤<PP. Antag att $t_{[k]} < t_{[i]}$ och $t_{[i]} \leq t_{[j]}$, där $t_{[i]}$, $t_{[j]}$, $t_{[k]} \in$ T. Då förekommer k < i och i ≤ j på b [från Def.IM]. T-≤<PP har tillämpats, eftersom b är fullständig. Alltså har vi k ≤ l och l < j på b, där l är ny. Alltså finns det en tidpunkt $t_{[l]}$ i T, sådan att $t_{[k]} \leq t_{[l]}$ och $t_{[l]} < t_{[j]}$ [från Def.IM]. ■

Referenser

Barringer, H. Fisher, M. Gabbay, D. & Gough, G. (red.) (2000). *Advances in Temporal Logic*. Springer.

Beth, E. W. (1955). Semantic Entailment and Formal Derivability. *Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Afdeling Letterkunde, N.S., vol. 18, no. 13, Amsterdam, ss. 309–342. Publicerad på nytt i Hintikka (1969), ss. 9–41.

Beth, E. W. (1959). *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam.

Burgess, J. P. (1984). Basic Tense Logic. I D. Gabbay & F. Guenthner (red.) *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 2, Dordrecht: Reidel, ss. 89-133.

D'Agostino, M., Gabbay, D., Hähnle, R., & Posegga, J. (red.) (1999) *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fitting, M. & Mendelsohn, R. L. (1998). *First-Order Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers.

Finger, M. Gabbay, D. & Reynolds, M. (2002). Advanced Tense Logic. I D. Gabbay & F. Guenther (red.) *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 7, Kluwer Academic Publishers, ss. 43-203.

Galton, A. (1999). Temporal Logic. I N. Zalta (red.) *Stanford Encyclopedia* of Philosophy. Hämtat från <http://plato.stanford.edu/entries/logic-temporal/> den 17 oktober 2014. Först publicerat 29 november 1999, uppdaterat 7 februari 2008.

Garson, J. W. (2006). *Modal Logic for Philosophers*. New York: Cambridge University Press.

Gentzen, G. (1935). Untersuchungen über das Logische Shliessen I. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 176–210. Engelsk översättning "Investigations into Logical Deduction", i Szabo (1969).

Gentzen, G. (1935b). Untersuchungen über das Logische Shliessen II. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 405–431. Engelsk översättning "Investigations into Logical Deduction", i Szabo (1969).

Goldblatt, R. (1992). *Logics of Time and Computation*. CSLI.

Hintikka, J. (1969). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford Readings in Philosophy, Oxford University Press.

Jeffrey, R. C. (1967). *Formal Logic: Its Scope and Limits*. New York: McGraw-Hill.

Kröger, F. & Merz, S. (2008). *Temporal Logic and State Systems*. Springer.

McArthur, R. P. (1976). *Tense Logic*. Dordrecht: Reidel Publishing.

Needham, P. (1975). *Temporal Perspective*. Filosofiska Studier 25, Uppsala Universitet.

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Prior, A. N. (1957). *Time and Modality*. Oxford.

Prior, A. N. (1967). *Past, Present and Future*. Oxford.

Rescher, N. & Urquhart, A. (1971). *Temporal logic*. Wien: Springer-Verlag.

Rönnedal, D. (2012). Temporal alethic-deontic logic and semantic tableaux. *Journal of Applied Logic*, 10, ss. 219-237.

Rönnedal, D. (2012b). *Extensions of Deontic Logic: An Investigation into some Multi-Modal Systems*. Department of Philosophy, Stockholm University.

Smullyan, R. M. (1968). *First-Order Logic*. Heidelberg: Springer-Verlag.

Szabo, M. E. (red.) (1969). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland, Amsterdam.

van Benthem, J. (1983). *The Logic of Time*. Dordrecht, Boston and London: Kluwer Academic Publishers.

Øhrstrøm P. & Hasle, P. F. V. (1995). *Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Daniel Rönnedal
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
daniel.ronnedal@philosophy.su.se