Värderelationer i Dyadisk Deontisk Logik

Daniel Rönnedal

Abstrakt
Det finns minst fem olika värderelationer: *bättre än*, *minst lika bra som*, *lika bra som*, *sämre än* och *minst lika dålig som*. Syftet med den här uppsatsen är att undersöka vilka formella egenskaper dessa relationer har och hur de förhåller sig till varandra i dyadisk deontisk logik. Vi bevisar fyra olika metateorem, som vart och ett innehåller en mängd satser som kan bevisas i dyadisk deontisk logik. Enligt det första teoremet är A bättre än B eller B bättre än A eller A och B lika bra (för alla A och B); och om A är bättre än B, så är B inte bättre än A och inte heller lika bra som A osv. Det andra teoremet handlar om vilka formella egenskaper de olika värderelationerna har. Vi bevisar t.ex. att alla värderelationer är transitiva, att *lika bra som* och *minst lika bra som* är reflexiva och att *bättre än* är asymmetrisk. Teorem tre visar att om två sakförhållanden A och B är lika bra, så står A i exakt samma värderelationer till andra sakförhållanden som B (och tvärtom). Teorem fyra visar att detsamma gäller för sakförhållanden som är nödvändigt ekvivalenta.

1. Introduktion

Det finns minst fem olika värderelationer: *bättre än*, *minst lika bra som*, *lika bra som*, *sämre än* och *minst lika dålig som*. Syftet med den här uppsatsen är att undersöka vilka formella egenskaper dessa relationer har och hur de förhåller sig till varandra i dyadisk deontisk logik. Vi bevisar fyra olika metateorem, som vart och ett innehåller en mängd satser som kan bevisas i dyadisk deontisk logik. Enligt det första teoremet är A bättre än B eller B bättre än A eller A och B lika bra (för alla A och B); och om A är bättre än B, så är B inte bättre än A och inte heller lika bra som A; om B är bättre än A, så är A inte bättre än B och inte heller lika bra som B osv. Det andra teoremet handlar om vilka formella egenskaper de olika värderelationerna har. Vi bevisar t.ex. att alla värderelationer är transitiva, att *lika bra som* och *minst lika bra som* är reflexiva och att *bättre än* är asymmetrisk. Teorem tre visar att om två sakförhållanden A och B är lika bra, så står A i exakt samma värderelationer till andra sakförhållanden som B (och tvärtom). Teorem fyra visar att detsamma gäller för sakförhållanden som är nödvändigt ekvivalenta.

Filosofiska Notiser, Årgång 4, Nr. 1, Januari 2017, 3–23

Det tycks som om värdeuttrycken ”bättre än”, ”minst lika bra som”, ”lika bra som”, ”sämre än” och ”minst lika dålig som” kan användas i flera olika betydelser. I den här uppsatsen är vi intresserade av hur dessa uttryck kan definieras i s.k. dyadisk deontisk logik. De definitioner vi använder är kanske inte uppenbart korrekta vid en första anblick. Men de teorem vi kan härleda med hjälp av dessa definitioner är intuitivt mycket rimliga. Definitionernas fruktbarhet avgörs delvis av vilka konsekvenser de har. Våra system tycks inte omedelbart lämpa sig för att symbolisera alla typer av värdeuttryck. När vi säger att A är bättre än B i den här uppsatsen, så menar vi att A är moraliskt bättre än B allt taget i beaktande; och på samma sätt förhåller det sig med de övriga värdeuttrycken.

Dyadisk deontisk logik är en typ av deontisk logik som innehåller särskilda symboler som kan användas för att analysera villkorliga normer av formen: ”Det bör vara fallet att A givet att B är fallet”, ”Det är tillåtet att A givet att B är fallet” och ”Det är förbjudet att A givet att B är fallet”. Dessa symboler kan sedan användas i definitionerna av våra olika värdeuttryck.

Nicholas Rescher (1958), Georg Henrik von Wright (1964), Sven Danielsson (1968), Bengt Hansson (1969), Bas van Fraassen (1972), (1973), David Lewis (1973), (1974), Frans von Kutschera (1974) och Lennart Åqvist (1971), (1973), (1987), är några av pionjärerna inom denna gren av logiken. I den här uppsatsen kommer vi att använda ett system som kallas ”TG” i Rönnedal (2009b) för att bevisa våra olika teorem. För mer information om detta system, och om dyadisk deontisk logik i allmänhet, se Rönnedal (2009b), (2012), (2015); se också Rönnedal (2009).[1]

Uppsatsen är indelad i tre avsnitt. Avsnitt 2 innehåller en introduktion till det dyadiska systemet TG, som vi använder i den här uppsatsen för att härleda olika satser. I avsnitt 3 bevisar jag fyra intressanta metateorem, som handlar om vilka formella egenskaper de olika värderelationerna har och hur de förhåller sig till varandra. Innehållet i dessa teorem har redan beskrivits ovan.

[1] Det kan finnas många olika skäl att studera dyadisk deontisk logik, förutom att det går att formulera intressanta definitioner av våra olika värdeuttryck i denna typ av logik. I Rönnedal (2009b) nämner jag några. Det kanske viktigaste skälet är att vi tycks behöva någon form av dyadisk deontisk logik för att lösa Roderick M. Chisholms s.k. ”contrary-to-duty” paradox (se Chisholm (1963)). (Se också Prior (1954).) För mer information, se Rönnedal (2012, ss. 112–118); se också Rönnedal (2012, ss. 118–121).

2. Dyadisk deontisk logik

Det här avsnittet innehåller en sammanfattning av den syntax, semantik och bevisteori vi använder i den här uppsatsen (för en mer utförlig framställning av dyadisk deontisk logik och systemet TG, se Rönnedal (2009b) eller Rönnedal (2012)).

2.1 Syntax

Språket L2 består av följande alfabet och satser.

Alfabet

En mängd satsbokstäver p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2, …
De satslogiska konnektiven $\neg$ (negation), $\wedge$ (konjunktion), $\vee$ (disjunktion), $\rightarrow$ (materiell implikation) och $\leftrightarrow$ (materiell ekvivalens).
Tre deontiska operatorer O, P och F.
$\top$ (verum), $\perp$ (falsum), parenteser), (,] och [.
Tre aletiska operatorer $\square$ (nödvändighet), $\diamond$ (möjlighet) och $\overline{\diamond}$ (omöjlighet).

Satser

Språket L2 består av alla satser eller välformade formler (vff) som genereras från följande villkor.

Alla satsbokstäver, $\top$ och $\perp$ är satser.
Om A är en sats, så är $\neg$A en sats.
Om A och B är satser, så är (A $\wedge$ B), (A $\vee$ B), (A $\rightarrow$ B) och (A $\leftrightarrow$ B) satser.
Om A och B är satser, så är också O[A]B, P[A]B och F[A]B satser.
Ingenting annat är en sats.

A, B, C, D… representerar godtyckliga satser i språket (inte nödvändigtvis atomära). Parenteser runt välformade formler utelämnas i regel om ingen mångtydighet uppstår eller om den mångtydighet som uppstår är irrelevant i sammanhanget. De ”dyadiska” satserna i språket läses på följande sätt.

O[B]A: Det är obligatoriskt att A givet B.
P[B]A: Det är tillåtet att A givet B.
F[B]A: Det är förbjudet att A givet B.

Definitioner
$OA =_{df} O[\top]A$. $PA =_{df} P[\top]A$. $FA =_{df} F[\top]A$. $UA =_{df} U[\top]A$. $U[B]A =_{df} \neg O[B]A$. $K[B]A =_{df} P[B]A \wedge P[B]\neg A$. $N[B]A =_{df} \neg K[B]A$ ($O[B]A \vee O[B]\neg A$). $O'[B]A =_{df} P[B]\top \wedge O[B]A$. $P'[B]A =_{df} \neg O'[B]\neg A$ ($O[B]\bot \vee P[B]A$). $F'[B]A =_{df} \neg P'[B]A$ ($O'[B]\neg A$ eller ($P[B]\top \wedge F[B]A$)). $A \geq B =_{df} O[A \vee B]\bot \vee P[A \vee B]A$ ($P[A \vee B]\top \rightarrow P[A \vee B]A$ eller $P'[A \vee B]A$). $A > B =_{df} P[A \vee B]\top \wedge O[A \vee B]\neg B$ ($O'[A \vee B]\neg B$). $A = B =_{df} O[A \vee B]\bot \vee (P[A \vee B]A \wedge P[A \vee B]B)$ ($P'[A \vee B]A \wedge P'[A \vee B]B$). $A < B =_{df} P[B \vee A]\top \wedge O[B \vee A]\neg A$ ($O'[B \vee A]\neg A$ eller $B > A$). $A \leq B =_{df} O[B \vee A]\bot \vee P[B \vee A]B$ ($P[B \vee A]\top \rightarrow P[B \vee A]B$, $P'[B \vee A]B$ eller $B \geq A$). ”$A > B$” läses ”A är bättre än B”, ”$A \geq B$” ”A är minst lika bra som B”, ”$A = B$” ”A är lika bra som B”, ”$A < B$” ”A är sämre än B”, och ” $A \leq B$” ”A är minst lika dålig som B”. Vi skall säga att $>$, $\geq$, $=$, $\leq$ och $<$ är värdeoperatorer, och vi kallar ”$A > B$”, ”$A \geq B$” osv. värdesatser, ”A” försats och ”B” eftersats.

2.2 Semantik
Vi använder samma semantik i den här uppsatsen som i Rönnedal (2009b). Där introduceras två typer av ramar och modeller. De s.k. utvidgade ramarna och modellerna innehåller en preferensrelation mellan möjliga världar, en preferensrelation som används i definitionen av sanningsvillkoren för språkets olika satser. Informellt: Det är sant att det är obligatoriskt att A givet B (O[B]A) om och endast om (omm) A är sann i alla de bästa B-världarna, där en B-värld är en möjlig värld i vilken B är sann. Det är sant att det är tillåtet att A givet B (P[B]A) omm A är sann i minst en av de bästa B-världarna. Och det är sant att det är förbjudet att A givet B (F[B]A) omm A inte är sann i någon av de bästa B-världarna.

2.3 Bevisteori
Vi använder samma tablåmetod i den här uppsatsen som i Rönnedal (2009b) och (2012). Vill vi bevisa en sats A, så skapar vi en semantisk tablå för negationen av A. Är alla grenar i denna tablå slutna, så är A giltig. Intuitivt innebär detta att antagandet att A är falsk leder till en motsägelse, varför A måste vara sann. Vi använder genomgående systemet TG i våra bevis. Detta är det starkaste systemet som beskrivs i Rönnedal (2009b) och det innehåller alla tablåregler som presenteras i denna uppsats. Många av de satser vi undersöker kan emellertid även bevisas i svagare system.[2]

[2] För mer information om tablåmetoden, se t.ex. Beth (1955), (1959), D'Agostino, Gabbay, Hähnle & Posegga (red.) (1999), Fitting (1972), (1983), (1999), Jeffrey (1967), Kripke (1959), Priest (2008), Rönnedal (2009), (2009b), (2012), Smullyan (1963), (1965), (1966), (1968).

3. Några teorem

I det här avsnittet skall vi bevisa några teorem som handlar om hur värdeuttrycken ”bättre än”, ”minst lika bra som”, ”lika bra som” osv. förhåller sig till varandra och vilka formella egenskaper de olika värderelationerna har.

Avsnittet innehåller fyra teorem, och varje teorem innehåller en mängd delsatser. Jag kommer inte att gå igenom varje enskilt bevis, men jag kommer att ta upp några exempel för att belysa bevismetoden. Det första teoremet visar att alla par av satser i TG kan delas in i tre uttömmande och ömsesidigt uteslutande kategorier. Det är antingen fallet att A är bättre än B eller att B är bättre än A eller att A och B är lika bra, och om A är bättre än B, så är B inte bättre än A och inte heller lika bra som A, osv. Teorem 2 handlar om de formella egenskaperna hos de olika värderelationerna. Teoremet visar t.ex. att *lika bra som* är en ekvivalensrelation, att *bättre än* och *minst lika bra som* är transitiva, och att *minst lika bra som* är reflexiv medan *bättre än* är irreflexiv. Teorem 3 visar att om A och B är lika bra, så kan A bytas ut mot B både i försats och eftersats i varje värdesats med bevarat sanningsvärde. Teorem 4 visar att samma sak gäller om A och B är nödvändigt ekvivalenta.

<table>
<tr><td colspan="2">(4) $A \geq B$ ($B \leq A$)</td><td>(5) $(B \geq A) \wedge \neg(A = B)$</td></tr>
<tr><td>(1) $A > B$ ($B < A$)</td><td>(2) $A = B$</td><td>(3) $B > A$ ($A < B$)</td></tr>
<tr><td>(6) $(A \geq B) \wedge \neg(A = B)$</td><td colspan="2">(7) $B \geq A$ ($A \leq B$)</td></tr>
</table>

Tabell 1

Teorem 1. Låt (1), (2), (3) etc. referera till rutorna (1), (2), (3) etc. i tabell 1 eller till satserna i dessa rutor. Då gäller följande. **(i)** (1), (3), (4), och (7) innehåller två satser var. Satsen inom parentes är logiskt ekvivalent med satsen som inte är inom parentes. $A > B$ är t.ex. logiskt ekvivalent med $B < A$. Dvs. A är bättre än B om och endast om B är sämre än A. Denna del visar att $<$ är konversen till $>$ (och vice versa) och att $\geq$ är konversen till $\leq$ (och vice versa). **(ii)** Varje par av sakförhållanden är inkluderat i en och endast en av rutorna (1), (2), eller (3). Det betyder att t.ex. $(A > B) \vee (B > A) \vee (A = B)$ är ett teorem; och om en av disjunkterna i denna sats är sann, så är de andra falska. Dvs. A är bättre än B, eller B är bättre än A eller, A och B är lika bra; och om A är bättre än B, så är det inte fallet att B är bättre än A och det är inte fallet att A och B är lika bra, etc. **(iii)** $(4) \leftrightarrow ((1) \vee (2))$ och $(7) \leftrightarrow ((2) \vee (3))$ är teorem. Det här innebär att t.ex. $(A \geq B) \leftrightarrow ((A > B) \vee (A = B))$ är ett teorem. Dvs. A är minst lika bra som B om och endast om A är bättre än B eller A är lika bra som B. **(iv)** (3) $\leftrightarrow$ (5) och (1) $\leftrightarrow$ (6) är teorem. Det här innebär t.ex. att $(A>B)\leftrightarrow((A\geq B)\wedge\neg(A=B))$ är ett teorem. Dvs. A är bättre än B om och endast om A är minst lika bra som B men inte lika bra som B. **(v)** Följande samband gäller: (1) $\leftrightarrow\neg$(7), (6) $\leftrightarrow\neg$(7), (3) $\leftrightarrow\neg$(4), (4) $\leftrightarrow\neg$(5), (4) $\vee$ (7), (2) $\leftrightarrow$ ((4) $\wedge$ (7)).

Bevis. För att bevisa detta teorem visar vi att alla satserna i tabell 2 till 8 är härledbara i TG. Vi går igenom några exempel och lämnar resten till läsaren. Satserna i tabell 3 visar att (1), (2) och (3) är uttömmande, och satserna i tabell 4 visar att (1), (2) och (3) är ömsesidigt uteslutande.

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(A > B)\leftrightarrow(B < A)$	A är bättre än B omm B är sämre än A.
(ii)	$(A \geq B)\leftrightarrow(B \leq A)$	A är minst lika bra som B omm B är minst lika dålig som A.

Tabell 2

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(A > B) \vee (B > A) \vee (A = B)$	A är bättre än B eller B är bättre än A eller A är lika bra som B.
(ii)	$(B < A) \vee (B > A) \vee (A = B)$	B är sämre än A eller B är bättre än A eller A är lika bra som B.
(iii)	$(A < B) \vee (B < A) \vee (A = B)$	A är sämre än B eller B är sämre än A eller A är lika bra som B.
(iv)	$(B > A) \vee (B < A) \vee (A = B)$	B är bättre än A eller B är sämre än A eller A är lika bra som B.

Tabell 3

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(A > B) \to \neg(B > A)$	Om A är bättre än B, så är B inte bättre än A.
(ii)	$(A > B) \to \neg(A < B)$	Om A är bättre än B, så är A inte sämre än B.
(iii)	$(A > B) \to \neg(A = B)$	Om A är bättre än B, så är A inte lika bra som B.
(iv)	$(A < B) \to \neg(A > B)$	Om A är sämre än B, så är A inte bättre än B.
(v)	$(A < B) \to \neg(B < A)$	Om A är sämre än B, så är B inte sämre än A.
(vi)	$(A < B) \to \neg(A = B)$	Om A är sämre än B, så är A inte lika bra som B.
(vii)	$(A = B) \to \neg(A > B)$	Om A är lika bra som B, så är A inte bättre än B.
(viii)	$(A = B) \to \neg(A < B)$	Om A är lika bra som B, så är A inte sämre än B.
(ix)	$(A = B) \to \neg(B < A)$	Om A är lika bra som B, så är B inte sämre än A.
(x)	$(A = B) \to \neg(B > A)$	Om A är lika bra som B, så är B inte bättre än A.

Tabell 4

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(A > B) \rightarrow (A \geq B)$	Om A är bättre än B, så är A minst lika bra som B.
(ii)	$(A = B) \rightarrow (A \geq B)$	Om A är lika bra som B, så är A minst lika bra som B.
(iii)	$(A < B) \rightarrow (A \leq B)$	Om A är sämre än B, så är A minst lika dålig som B.
(iv)	$(A = B) \rightarrow (A \leq B)$	Om A är lika bra som B, så är A minst lika dålig som B.

Tabell 5

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(B \geq A) \leftrightarrow ((B > A) \vee (A = B))$	B är minst lika bra som A omm B är bättre än A eller A är lika bra som B.
(ii)	$(B \geq A) \leftrightarrow ((A < B) \vee (A = B))$	B är minst lika bra som A omm A är sämre än B eller A är lika bra som B.
(iii)	$(A \leq B) \leftrightarrow ((B > A) \vee (A = B))$	A är minst lika dålig som B omm B är bättre än A eller A är lika bra som B.
(iv)	$(A \leq B) \leftrightarrow ((A < B) \vee (A = B))$	A är minst lika dålig som B omm A är sämre än B eller A är lika bra som B.

Tabell 6

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(A > B) \leftrightarrow ((A \geq B) \wedge \neg(A = B))$	A är bättre än B omm A är minst lika bra som B och A inte är lika bra som B.
(ii)	$(A > B) \leftrightarrow ((B \leq A) \wedge \neg(A = B))$	A är bättre än B omm B är minst lika dålig som A och A inte är lika bra som B.
(iii)	$(A < B) \leftrightarrow ((B \geq A) \wedge \neg(A = B))$	A är sämre än B omm B är minst lika bra som A och A inte är lika bra som B.
(iv)	$(A < B) \leftrightarrow ((A \leq B) \wedge \neg(A = B))$	A är sämre än B omm A är minst lika dålig som B och A inte är lika bra som B.

Tabell 7

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(A > B) \leftrightarrow \neg(B \geq A)$	A är bättre än B omm B inte är minst lika bra som A.
(ii)	$(A < B) \leftrightarrow \neg(B \leq A)$	A är sämre än B omm B inte är minst lika dålig som A.
(iii)	$(A \geq B) \vee (B \geq A)$	A är minst lika bra som B eller så är B minst lika bra som A.
(iv)	$(A \leq B) \vee (B \leq A)$	A är minst lika dålig som B eller så är B minst lika dålig som A.
(v)	$(A = B) \leftrightarrow ((A \geq B) \wedge (B \geq A))$	A är lika bra som B omm A är minst lika bra som B och B är minst lika bra som A.
(vi)	$(A = B) \leftrightarrow ((A \leq B) \wedge (B \leq A))$	A är lika bra som B omm A är minst lika dålig som B och B är minst lika dålig som A.

Tabell 8

$(A>B)\leftrightarrow\neg(B\geq A) = (P[A\vee B]\top\wedge O[A\vee B]\neg B)\rightarrow\neg(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)$

(1) $\neg((P[A\vee B]\top\wedge O[A\vee B]\neg B)\rightarrow\neg(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B))$, 0

(2) $P[A\vee B]\top\wedge O[A\vee B]\neg B$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]

(3) $\neg\neg(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]

(4) $P[A\vee B]\top$, 0 [2, $\wedge$]

(5) $O[A\vee B]\neg B$, 0 [2, $\wedge$]

(6) $O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B$, 0 [3, $\neg\neg$]

(7) $\Box((A\vee B)\leftrightarrow(B\vee A))$, 0 [GA]

(8) $P[B\vee A]\top$, 0 [4, 7, DR1]

(9) $O[B\vee A]\neg B$, 0 [5, 7, DR1]

↙ ↘

(10) $O[B\vee A]\bot$, 0 [6, $\vee$]	(11) $P[B\vee A]B$, 0 [6, $\vee$]
(12) $0r_{B\vee A}1$ [8, P]	(13) $0r_{B\vee A}1$ [11, P]
(14) $\top$, 1 [8, P]	(15) B, 1 [11, P]
(16) $\bot$, 1 [10, 12, O]	(17) $\neg B$, 1 [9, 13, O]
(18) * [16]	(19) * [15, 17]

$(A\geq B)\vee(B\geq A) = (O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\vee(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)$

(1) $\neg((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\vee(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B))$, 0

(2) $\neg(O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)$, 0 [1, $\neg\vee$]

(3) $\neg(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)$, 0 [1, $\neg\vee$]

(4) $\neg O[A\vee B]\bot$, 0 [2, $\neg\vee$]

(5) $\neg P[A\vee B]A$, 0 [2, $\neg\vee$]

(6) $\neg O[B\vee A]\bot$, 0 [3, $\neg\vee$]

(7) $\neg P[B\vee A]B$, 0 [3, $\neg\vee$]

(8) $P[A\vee B]\neg\bot$, 0 [4, $\neg O$]

(9) $O[A\vee B]\neg A$, 0 [5, $\neg P$]

(10) $P[B\vee A]\neg\bot$, 0 [6, $\neg O$]

(11) $O[B\vee A]\neg B$, 0 [7, $\neg P$]

(12) $0r_{A\vee B}1$ [8, P]

(13) $\neg\bot$, 1 [8, P]

(14) $\neg A$, 1 [9, 12, O]

(15) $A\vee B$, 1 [12, Tα1]

(16) $\Box((A\vee B)\leftrightarrow(B\vee A))$, 0 [GA]

(17) $O[A\vee B]\neg B$, 0 [11, 16, DR2]

(18) $\neg B$, 1 [12, 17, O]

↙ ↘

(19) A, 1 [15, $\vee$]	(20) B, 1 [15, $\vee$]
(21) * [14, 19]	(22) * [18, 20]

”GA” i bevisen ovan står för regeln the Global Assumption Rule. Se Rönnedal (2009b) för mer information om denna regel.

$(A=B)\leftrightarrow((A\geq B)\wedge(B\geq A)) = (O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))\leftrightarrow ((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B))$

Om det är logisk sant att A implicerar B och det är logiskt sant att B implicerar A, så är det logiskt sant att A och B är ekvivalenta. Så för att bevisa att A och B är logiskt ekvivalenta, kan vi först bevisa att A implicerar B och sedan att B implicerar A. Vi använder denna strategi för att bevisa sats (v) i tabell 8. Eftersom $(A=B)\leftrightarrow((A\geq B)\wedge(B\geq A))$ per definition är logiskt ekvivalent med $(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))\leftrightarrow((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B))$, bevisar vi först att $(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))$ medför $(O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)$, och sedan att $(O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)$ medför $O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)$.

Vänster till höger.

$\neg((O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))\rightarrow$
$((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)))$, 0
$(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))$, 0
$\neg((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B))$, 0

<table>
<tr><td colspan="2">↙</td><td colspan="2">↘</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\neg(O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)$, 0
$\neg O[A\vee B]\bot$, 0
$\neg P[A\vee B]A$, 0
$P[A\vee B]\neg\bot$, 0
$O[A\vee B]\neg A$, 0
$0r_{A\vee B}1$
$\neg\bot$, 1</td><td colspan="2">$\neg(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)$, 0
$\neg O[B\vee A]\bot$, 0
$\neg P[B\vee A]B$, 0
$P[B\vee A]\neg\bot$, 0
$O[B\vee A]\neg B$, 0
$\Box((A\vee B)\leftrightarrow(B\vee A))$, 0</td></tr>
<tr><td>↙</td><td>↘</td><td>↙</td><td>↘</td></tr>
<tr><td>$O[A\vee B]\bot$, 0
$\bot$, 1
*</td><td>$P[A\vee B]A\wedge$
$P[A\vee B]B$, 0
$P[A\vee B]A$, 0
$P[A\vee B]B$, 0
$0r_{A\vee B}2$
A, 2
$\neg$A, 2
*</td><td>$O[A\vee B]\bot$, 0
$P[A\vee B]\neg\bot$, 0
$0r_{A\vee B}1$
$\neg\bot$, 1
$\bot$, 1
*</td><td>$P[A\vee B]A\wedge$
$P[A\vee B]B$, 0
$P[A\vee B]A$, 0
$P[A\vee B]B$, 0
$O[A\vee B]\neg B$, 0
$0r_{A\vee B}1$
B, 1
$\neg$B, 1
*</td></tr>
</table>

Höger till vänster.

(1) $\neg(((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B))\rightarrow(O[A\vee B]\bot\vee (P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)))$, 0

(2) $((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B))$, 0 [1]
(3) $\neg(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A$, 0 [2, $\wedge$]
(5) $O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B$, 0 [2, $\wedge$]
(6) $\neg O[A\vee B]\bot$, 0 [3, $\neg\vee$]
(7) $\neg(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)$, 0 [3, $\neg\vee$]
(8) $P[A\vee B]\neg\bot$, 0 [6, $\neg O$]
(9) $0r_{A\vee B}1$ [8, P]
(10) $\neg\bot$, 1 [8, P]
(11) $\Box((A\vee B)\leftrightarrow(B\vee A))$, 0 [GA]
↙ ↘

(12) $O[A\vee B]\bot$, 0 [4, $\vee$]	(13) $P[A\vee B]A$, 0 [4, $\vee$]			
(14) $\bot$, 1 [9, 12, O]	↙		↘	
(15) * [14]	(16) $O[B\vee A]\bot$, 0 [5, $\vee$]		(17) $P[B\vee A]B$, 0 [5, $\vee$]	
	(18) $O[A\vee B]\bot$, 0 [11, 16]		(19) $P[A\vee B]B$, 0 [11, 17]	
	(20) $\bot$, 1 [9, 18, O]		↙	↘
	(21) * [20]		(22) $\neg P[A\vee B]A$, 0	(23) $\neg P[A\vee B]B$, 0
			(24) * [13, 22]	(25) * [19, 23] ■

Vi skall nu säga något om de formella egenskaperna hos våra värderelationer. Låt R vara en relation. Då gäller det att R är reflexiv omm ARA; R är irreflexiv omm $\neg$ARA; R är symmetrisk omm ARB $\rightarrow$ BRA; R är asymmetrisk omm ARB$\rightarrow\neg$BRA; R är transitiv omm (ARB$\wedge$BRC)$\rightarrow$ARC; R är ”antisymmetrisk” omm (ARB $\wedge$ BRA) $\rightarrow$ (A = B); R är Euklidisk omm (ARB$\wedge$ARC)$\rightarrow$BRC.

Teorem 2. (i) *Lika bra som* (=) är en ekvivalensrelation: den är reflexiv, symmetrisk och transitiv. *Lika bra som* (=), *minst lika bra som* (≥), och *minst lika dålig som* (≤) är reflexiva relationer. *Bättre än* (>) och *sämre än* (<) är irreflexiva relationer. *Lika bra som* (=) är symmetrisk, och *bättre än* (>) och *sämre än* (<) är asymmetriska. *Minst lika bra som* (≥), och *minst lika dålig som* (≤), är varken symmetriska eller asymmetriska. Alla värderelationer är transitiva. *Lika bra som* är ”antisymmetrisk” och Euklidisk. **(ii)** Alla satser i tabell 10 är teorem i TG. Del (ii) i detta teorem säger något om hur de olika värderelationerna är relaterade till varandra.

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$A = A$	A är lika bra som A.
(ii)	$A \geq A$	A är minst lika bra som A.
(iii)	$A \leq A$	A är minst lika dålig som A.
(iv)	$\neg(A > A)$	A är inte bättre än A.
(v)	$\neg(A < A)$	A är inte sämre än A.
(vi)	$(A = B) \rightarrow (B = A)$	Om A är lika bra som B, så är B lika bra som A.
(vii)	$(A > B) \rightarrow \neg(B > A)$	Om A är bättre än B, så är B inte bättre än A.
(viii)	$(A < B) \rightarrow \neg(B < A)$	Om A är sämre än B, så är B inte sämre än A.
(ix)	$((A > B) \wedge (B > C)) \rightarrow (A > C)$	Om A är bättre än B och B är bättre än C, så är A bättre än C.
(x)	$((A < B) \wedge (B < C)) \rightarrow (A < C)$	Om A är sämre än B och B är sämre än C, så är A sämre än C.
(xi)	$((A \geq B) \wedge (B \geq C)) \rightarrow (A \geq C)$	Om A är minst lika bra som B och B är minst lika bra som C, så är A minst lika bra som C.
(xii)	$((A \leq B) \wedge (B \leq C)) \rightarrow (A \leq C)$	Om A är minst lika dålig som B och B är minst lika dålig som C, så är A minst lika dålig som C.
(xiii)	$((A = B) \wedge (B = C)) \rightarrow (A = C)$	Om A är lika bra som B och B är lika bra som C, så är A lika bra som C.
(xiv)	$((A = B) \wedge (A = C)) \rightarrow (B = C)$	Om A är lika bra som B och A är lika bra som C, så är B lika bra som C.
(xv)	$((A = C) \wedge (B = C)) \rightarrow (A = B)$	Om A är lika bra som C och B är lika bra som C, så är A lika bra som B.

Tabell 9

Vi har sagt att ”A = B” läses ”A är lika bra som B”. Men eftersom lika bra är en ekvivalensrelation, kan ”A = B” lika gärna läsas ”A och B är lika bra” eller t.o.m. ”B är lika bra som A” och ”B och A är lika bra”. ”A = B” kan också läsas ”A är lika dålig som B”, ”A och B är lika dåliga” etc. Om någon säger att A är lika bra som B, så antyder detta att både A och B är bra (på någon absolut skala). Om någon säger att A är lika dålig som B, så antyder det att både A och B är dåliga (på någon absolut skala). Men det går att argumentera för att detta handlar om ett slags pragmatisk implikation istället för en semantisk skillnad mellan båda dessa uttryck. Enligt tabell 10 (ix) och (x) är *minst lika bra som*, och *minst lika dålig som* ”antisymmetriska”.

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$((A > B) \wedge (B = C)) \rightarrow (A > C)$	Om A är bättre än B och B är lika bra som C, så är A bättre än C.
(ii)	$((A < B) \wedge (B = C)) \rightarrow (A < C)$	Om A är sämre än B och B är lika bra som C, så är A sämre än C.
(iii)	$((A \geq B) \wedge (B > C)) \rightarrow (A > C)$	Om A är minst lika bra som B och B är bättre än C, så är A bättre än C.
(iv)	$((A \leq B) \wedge (B < C)) \rightarrow (A < C)$	Om A är minst lika dålig som B och B är sämre än C, så är A sämre än C.
(v)	$((A = B) \wedge (B > C)) \rightarrow (A > C)$	Om A är lika bra som B och B är bättre än C, så är A bättre än C.
(vi)	$((A = B) \wedge (B < C)) \rightarrow (A < C)$	Om A är lika bra som B och B är sämre än C, så är A sämre än C.
(vii)	$((A > B) \wedge (B \geq C)) \rightarrow (A > C)$	Om A är bättre än B och B är minst lika bra som C, så är A bättre än C.
(viii)	$((A < B) \wedge (B \leq C)) \rightarrow (A < C)$	Om A är sämre än B och B är minst lika dålig som C, så är A sämre än C.
(ix)	$((A \geq B) \wedge (B \geq A)) \rightarrow (A = B)$	Om A är minst lika bra som B och B är minst lika bra som A, så är A lika bra som B.
(x)	$((A \leq B) \wedge (B \leq A)) \rightarrow (A = B)$	Om A är minst lika dålig som B och B är minst lika dålig som A, så är A lika bra som B.

Tabell 10

Bevis. Alla satser i tabell 9 och 10 är intuitivt rimliga. Bevisen av flera av dessa teorem är emellertid inte triviala. Här är några exempel.

Tabell 9 (i) $(A=A) = O[A \vee A]\bot \vee (P[A \vee A]A \wedge P[A \vee A]A)$

$$
\begin{array}{c}
\neg(O[A \vee A]\bot \vee (P[A \vee A]A \wedge P[A \vee A]A)),\ 0 \\
\neg O[A \vee A]\bot,\ 0 \\
\neg(P[A \vee A]A \wedge P[A \vee A]A),\ 0 \\
P[A \vee A]\neg\bot,\ 0 \\
0r_{A \vee A}1 \\
\neg\bot,\ 1 \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\neg P[A \vee A]A,\ 0 \\
O[A \vee A]\neg A,\ 0 \\
\neg A,\ 1 \\
A \vee A,\ 1 \\
\swarrow \quad \searrow \\
\begin{array}{cc} A,\ 1 & A,\ 1 \\ * & * \end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\neg P[A \vee A]A,\ 0 \\
O[A \vee A]\neg A,\ 0 \\
\neg A,\ 1 \\
A \vee A,\ 1 \\
\swarrow \quad \searrow \\
\begin{array}{cc} A,\ 1 & A,\ 1 \\ * & * \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Tabell 9 (vii) $(A > B) \rightarrow \neg(B > A) =$
$(P[A\vee B]\top \wedge O[A\vee B]\neg B) \rightarrow \neg(P[B\vee A]\top \wedge O[B\vee A]\neg A)$

$$
\begin{array}{c}
\neg((P[A\vee B]\top \wedge O[A\vee B]\neg B) \rightarrow \neg(P[B\vee A]\top \wedge O[B\vee A]\neg A)), 0 \\
P[A\vee B]\top \wedge O[A\vee B]\neg B, 0 \\
\neg\neg(P[B\vee A]\top \wedge O[B\vee A]\neg A), 0 \\
P[A\vee B]\top, 0 \\
O[A\vee B]\neg B, 0 \\
P[B\vee A]\top \wedge O[B\vee A]\neg A, 0 \\
P[B\vee A]\top, 0 \\
O[B\vee A]\neg A, 0 \\
\Box((A\vee B)\leftrightarrow(B\vee A)), 0 \\
O[A\vee B]\neg A, 0 \\
0r_{A\vee B}1 \\
\top, 1 \\
\neg A, 1 \\
\neg B, 1 \\
A\vee B, 1 \\
\swarrow \qquad \searrow \\
A, 1 \qquad B, 1 \\
* \qquad\quad *
\end{array}
$$

Tabell 9 (ix) $((A>B)\wedge(B>C))\rightarrow(A>C)$. Denna sats säger att relationen *bättre än* är transitiv. Teoremet är intuitivt tilltalande och det kan tyckas vara uppenbart sant. Beviset är emellertid inte alls trivialt. Som tur är kan vi använda oss av några resultat i Rönnedal (2015). $((A>B)\wedge(B>C))\rightarrow(A>C)$ är per definition ekvivalent med $(O'[A \vee B]\neg B \wedge O'[B \vee C]\neg C) \rightarrow O'[A \vee C]\neg C$. Och denna sats är i sin tur logiskt ekvivalent med satsen vF5, dvs. $O'[A \vee B]\neg B \rightarrow (O'[B \vee C]\neg C \rightarrow O'[A \vee C]\neg C)$, som bevisas i Rönnedal (2015). Det följer att $((A>B)\wedge(B>C))\rightarrow(A>C)$ är ett teorem i TG.

Tabell 10 (iii) $((A\geq B)\wedge(B>C))\rightarrow(A>C)$. Denna sats är per definition ekvivalent med $(P'[A\vee B]A\wedge O'[B\vee C]\neg C)\rightarrow O'[A\vee C]\neg C$, som i sin tur är logiskt ekvivalent med satsen vF6, $P'[A \vee B]A \rightarrow (O'[B \vee C]\neg C \rightarrow O'[A \vee C]\neg C)$, som bevisas i Rönnedal (2015). Det följer att $((A\geq B)\wedge(B>C))\rightarrow(A>C)$ är ett teorem i TG.

Tabell 10 (v) $((A=B)\wedge(B>C))\rightarrow(A>C)$. Vi har ovan bevisat att $(A=B) \leftrightarrow ((A\geq B)\wedge(B\geq A))$ och $((A\geq B)\wedge(B>C))\rightarrow(A>C)$ är teorem i TG. Från detta följer det med hjälp av vanlig satslogik att $((A=B)\wedge(B>C))\to(A>C)$, vilket vi enkelt kan bevisa i TG genom att tillämpa regeln Global Assumption (GA) (se Rönnedal (2009b)).

Tabell 10 (vii) $((A>B)\wedge(B\geq C))\to(A>C)$. Denna sats är per definition ekvivalent med $(O'[A\vee B]\neg B\wedge P'[B\vee C]B)\to O'[A\vee C]\neg C$, som i sin tur är logiskt ekvivalent med vF7, $O'[A\vee B]\neg B\to(P'[B\vee C]B\to O'[A\vee C]\neg C)$, som bevisas i Rönnedal (2015). Det följer att $((A>B)\wedge(B\geq C))\to(A>C)$ är ett teorem i TG. ■

Teorem 3. Låt © vara >, ≥, =, ≤ eller <. Då är alla instanser av $(A=B)\to((A © C)\leftrightarrow(B © C))$ och $(A=B)\to((C © A)\leftrightarrow(C © B))$ teorem i TG. Om A är lika bra som B, så kan A ersättas med B både i försats och eftersats i varje (komparativ) värdesats (med bevarat sanningsvärde). För att bevisa detta, måste vi visa att alla satser i tabell 11 är teorem i TG.

Nr	**Teorem**	**Informell tolkning**
(i)	$(A=B)\to((A\geq C)\leftrightarrow(B\geq C))$	Om A är lika bra som B, så är A minst lika bra som C omm B är minst lika bra som C.
(ii)	$(A=B)\to((C\geq A)\leftrightarrow(C\geq B))$	Om A är lika bra som B, så är C minst lika bra som A omm C är minst lika bra som B.
(iii)	$(A=B)\to((A>C)\leftrightarrow(B>C))$	Om A är lika bra som B, så är A bättre än C omm B är bättre än C.
(iv)	$(A=B)\to((C>A)\leftrightarrow(C>B))$	Om A är lika bra som B, så är C bättre än A omm C är bättre än B.
(v)	$(A=B)\to((A=C)\leftrightarrow(B=C))$	Om A är lika bra som B, så är A lika bra som C omm B är lika bra som C.
(vi)	$(A=B)\to((C=A)\leftrightarrow(C=B))$	Om A är lika bra som B, så är C lika bra som A omm C är lika bra som B.
(vii)	$(A=B)\to((A<C)\leftrightarrow(B<C))$	Om A är lika bra som B, så är A sämre än C omm B är sämre än C.
(viii)	$(A=B)\to((C<A)\leftrightarrow(C<B))$	Om A är lika bra som B, så är C sämre än A omm C är sämre än B.
(ix)	$(A=B)\to((A\leq C)\leftrightarrow(B\leq C))$	Om A är lika bra som B, så är A minst lika dålig som C omm B är minst lika dålig som C.
(x)	$(A=B)\to((C\leq A)\leftrightarrow(C\leq B))$	Om A är lika bra som B, så är C minst lika dålig som A omm C är minst lika dålig som B.

Tabell 11

Bevis. Alla satser i tabell 11 är intuitivt rimliga. Bevisen är emellertid inte helt triviala. För den som är intresserad av att lära sig att handskas med systemet TG kan det vara en bra övning att härleda alla dessa satser (utan att använda GA). Tack vare regeln GA kan dock slutledningarna förenklas. Jag skall ta upp ett exempel för att illustrera metoden. Jag skall bevisa teorem (iii) i tabell 11.

(iii) $(A = B) \to ((A > C) \leftrightarrow (B > C))$. Vi har ovan bevisat satsen $((A = B) \wedge (B > C)) \to (A > C)$ (tabell 10 (v)) och vi har noterat att $(A = B) \to (B = A)$ (tabell 9 (vi)) är ett teorem i TG (beviset är relativt enkelt). $((A = B) \wedge (B > C)) \to (A > C)$ är logiskt ekvivalent med $(A = B) \to ((B > C) \to (A > C))$. Vi får alltså lägga till vilken instans som helst av dessa teorem på vilken öppen gren som helst i en TG-tablå. Vi använder oss av dessa hjälpsatser i beviset av (iii) nedan.

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\neg((A = B) \to ((A > C) \leftrightarrow (B > C))), 0} \\
\multicolumn{2}{c}{A = B, 0} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg((A > C) \leftrightarrow (B > C)), 0} \\
\multicolumn{2}{c}{(A = B) \to ((B > C) \to (A > C)), 0} \\
\multicolumn{2}{c}{(B = A) \to ((A > C) \to (B > C)), 0} \\
\multicolumn{2}{c}{(A = B) \to (B = A), 0} \\
\multicolumn{2}{c}{B = A, 0} \\
\multicolumn{2}{c}{(B > C) \to (A > C), 0} \\
\multicolumn{2}{c}{(A > C) \to (B > C), 0} \\
\swarrow & \searrow \\
A > C, 0 & \neg(A > C), 0 \\
\neg(B > C), 0 & B > C, 0 \\
B > C, 0 & A > C, 0 \\
* & *
\end{array}
$$

Nod (4), (5) och (6) i ovanstående tablå är instanser av de teorem vi har nämnt ovan. De introduceras med hjälp av GA. Övriga satser i tabell 11 kan bevisas på liknande sätt. ■

Låt oss ta upp ett annat teorem som påminner om teorem 3.

Teorem 4. Låt © vara $>$, $\geq$, $=$, $\leq$ eller $<$. Då är alla instanser av $\Box(A \leftrightarrow B) \to ((A \copyright C) \leftrightarrow (B \copyright C))$ och $\Box(A \leftrightarrow B) \to ((C \copyright A) \leftrightarrow (C \copyright B))$ teorem i TG. Om A är nödvändigt ekvivalent med B, så kan A ersättas med B i försatsen och i eftersatsen i varje (komparativ) värdesats (med bevarat sanningsvärde) och tvärtom.

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$\Box(A\leftrightarrow B)\to((A\geq C)\leftrightarrow(B\geq C))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är A minst lika bra som C omm B är minst lika bra som C.
(ii)	$\Box(A\leftrightarrow B)\to((C\geq A)\leftrightarrow(C\geq B))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är C minst lika bra som A omm C är minst lika bra som B.
(iii)	$\Box(A\leftrightarrow B)\to((A>C)\leftrightarrow(B>C))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är A bättre än C omm B är bättre än C.
(iv)	$\Box(A\leftrightarrow B)\to((C>A)\leftrightarrow(C>B))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är C bättre än A omm C är bättre än B.
(v)	$\Box(A\leftrightarrow B)\to((A=C)\leftrightarrow(B=C))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är A lika bra som C omm B är lika bra som C.
(vi)	$\Box(A\leftrightarrow B)\to((C=A)\leftrightarrow(C=B))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är C lika bra som A omm C är lika bra som B.
(vii)	$\Box(A\leftrightarrow B)\to((A<C)\leftrightarrow(B<C))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är A sämre än C omm B är sämre än C.
(viii)	$\Box(A\leftrightarrow B)\to((C<A)\leftrightarrow(C<B))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är C sämre än A omm C är sämre än B.
(ix)	$\Box(A\leftrightarrow B)\to((A\leq C)\leftrightarrow(B\leq C))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är A minst lika dålig som C omm B är minst lika dålig som C.
(x)	$\Box(A\leftrightarrow B)\to((C\leq A)\leftrightarrow(C\leq B))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är C minst lika dålig som A omm C är minst lika dålig som B.

Tabell 12

Bevis. Vi bevisar del (i) och (ii) direkt. Därefter härleder vi ett par hjälpsatser som tillsammans med teoremen i tabell 11 kan användas för att bevisa alla satser i tabell 12.

(i) $\Box(A\leftrightarrow B)\to((A\geq C)\leftrightarrow(B\geq C))$ =

$$\Box(A\leftrightarrow B)\to((O[A\lor C]\bot\lor P[A\lor C]A)\leftrightarrow(O[B\lor C]\bot\lor P[B\lor C]B))$$

$$\Box(A\leftrightarrow B),\ 0$$

$$\neg((O[A\lor C]\bot\lor P[A\lor C]A)\leftrightarrow(O[B\lor C]\bot\lor P[B\lor C]B)),\ 0$$

$$\Box(A\leftrightarrow B)\to\Box((A\lor C)\leftrightarrow(B\lor C)),\ 0$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$O[A\lor C]\bot\lor P[A\lor C]A$	$\neg(O[A\lor C]\bot\lor P[A\lor C]A),\ 0$
$\neg(O[B\lor C]\bot\lor P[B\lor C]B),\ 0$	$O[B\lor C]\bot\lor P[B\lor C]B,\ 0$
$\neg O[B\lor C]\bot,\ 0$	$\neg O[A\lor C]\bot,\ 0$
$\neg P[B\lor C]B,\ 0$	$\neg P[A\lor C]A,\ 0$
$P[B\lor C]\neg\bot,\ 0$	$P[A\lor C]\neg\bot,\ 0$
$O[B\lor C]\neg B,\ 0$	$O[A\lor C]\neg A,\ 0$
$\Box((A\lor C)\leftrightarrow(B\lor C)),\ 0$	$\Box((A\lor C)\leftrightarrow(B\lor C)),\ 0$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
P[A\vee C]\neg\bot,\ 0\\
O[A\vee C]\neg B,\ 0\\
\swarrow \qquad \searrow\\
\begin{array}{cc}
O[A\vee C]\bot,\ 0 & P[A\vee C]A,\ 0\\
0r_{A\vee C}1 & 0r_{A\vee C}1\\
\neg\bot,\ 1 & A,\ 1\\
\bot,\ 1 & \neg B,\ 1\\
* & A\leftrightarrow B,\ 1\\
 & *
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
P[B\vee C]\neg\bot,\ 0\\
O[B\vee C]\neg A,\ 0\\
\swarrow \qquad \searrow\\
\begin{array}{cc}
O[B\vee C]\bot,\ 0 & P[B\vee C]B,\ 0\\
0r_{B\vee C}1 & 0r_{B\vee C}1\\
\neg\bot,\ 1 & B,\ 1\\
\bot,\ 1 & \neg A,\ 1\\
* & A\leftrightarrow B,\ 1\\
 & *
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

(ii) $\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((C\geq A)\leftrightarrow(C\geq B))$ =

$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((O[C\vee A]\bot\vee P[C\vee A]C)\leftrightarrow(O[C\vee B]\bot\vee P[C\vee B]C))$

$$
\begin{array}{c}
\neg(\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((O[C\vee A]\bot\vee P[C\vee A]C)\leftrightarrow(O[C\vee B]\bot\vee P[C\vee B]C))),\ 0\\
\Box(A\leftrightarrow B),\ 0\\
\neg((O[C\vee A]\bot\vee P[C\vee A]C)\leftrightarrow(O[C\vee B]\bot\vee P[C\vee B]C)),\ 0\\
\Box((A\leftrightarrow B)\rightarrow\Box((C\vee A)\leftrightarrow(C\vee B)),\ 0\\
\swarrow \qquad\qquad \searrow\\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
O[C\vee A]\bot\vee P[C\vee A]C,\ 0\\
\neg(O[C\vee B]\bot\vee P[C\vee B]C),\ 0\\
\neg O[C\vee B]\bot,\ 0\\
\neg P[C\vee B]C),\ 0\\
P[C\vee B]\neg\bot,\ 0\\
O[C\vee B]\neg C,\ 0\\
\Box((C\vee A)\leftrightarrow(C\vee B)),\ 0\\
\swarrow \qquad \searrow\\
\begin{array}{cc}
O[C\vee A]\bot,\ 0 & P[C\vee A]C,\ 0\\
O[C\vee B]\bot,\ 0 & O[C\vee A]\neg C,\ 0\\
0r_{C\vee B}1 & 0r_{C\vee A}1\\
\neg\bot,\ 1 & C,\ 1\\
\bot,\ 1 & \neg C,\ 1\\
* & *
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\neg(O[C\vee A]\bot\vee P[C\vee A]C),\ 0\\
O[C\vee B]\bot\vee P[C\vee B]C,\ 0\\
\neg O[C\vee A]\bot,\ 0\\
\neg P[C\vee A]C,\ 0\\
P[C\vee A]\neg\bot,\ 0\\
O[C\vee A]\neg C,\ 0\\
\Box((C\vee A)\leftrightarrow(C\vee B)),\ 0\\
\swarrow \qquad \searrow\\
\begin{array}{cc}
O[C\vee B]\bot,\ 0 & P[C\vee B]C,\ 0\\
O[C\vee A]\bot,\ 0 & O[C\vee B]\neg C,\ 0\\
0r_{C\vee A}1 & 0r_{C\vee B}1\\
\neg\bot,\ 1 & C,\ 1\\
\bot,\ 1 & \neg C,\ 1\\
* & *
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Vi har nu sett hur man kan bevisa ett par teorem i tabell 12 utan att använda några hjälpsatser. När man väl har etablerat alla satser i tabell 11 finns det emellertid ett enklare sätt att härleda satserna i tabell 12. Först bevisar vi att $\Box(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A = B)$ är ett teorem. Sedan använder vi denna formel tillsammans med satserna i tabell 11 för att bevisa att alla satser i tabell 12 är teorem i TG. Detta steg i slutledningen är utomordentligt enkelt. Vi bevisar även följande teorem nedan: $\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(\neg A=\neg B)$.

$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(A=B) = \Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))$.

$$\begin{array}{c}
\neg(\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))), 0\\
\Box(A\leftrightarrow B), 0\\
\neg(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)), 0\\
\neg O[A\vee B]\bot, 0\\
\neg(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B), 0\\
P[A\vee B]\neg\bot, 0\\
\swarrow \qquad \searrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\neg P[A\vee B]A, 0 & \neg P[A\vee B]B, 0\\
O[A\vee B]\neg A, 0 & O[A\vee B]\neg B, 0\\
0r_{A\vee B}1 & 0r_{A\vee B}1\\
\neg\bot, 1 & \neg\bot, 1\\
\neg A, 1 & \neg B, 1\\
A\vee B, 1 & A\vee B, 1\\
\swarrow \qquad \searrow & \swarrow \qquad \searrow\\
\begin{array}{cc} A, 1 & B, 1\\ * & A\leftrightarrow B, 1\\ & A, 1\\ & * \end{array} & \begin{array}{cc} A, 1 & B, 1\\ A\leftrightarrow B, 1 & *\\ B, 1 & \\ * & \end{array}
\end{array}$$

$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(\neg A=\neg B) =$
$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(O[\neg A\vee\neg B]\bot\vee(P[\neg A\vee\neg B]\neg A\wedge P[\neg A\vee\neg B]\neg B))$.

$$\begin{array}{c}
\neg(\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(O[\neg A\vee\neg B]\bot\vee(P[\neg A\vee\neg B]\neg A\wedge P[\neg A\vee\neg B]\neg B))), 0\\
\Box(A\leftrightarrow B), 0\\
\neg(O[\neg A\vee\neg B]\bot\vee(P[\neg A\vee\neg B]\neg A\wedge P[\neg A\vee\neg B]\neg B)), 0\\
\neg O[\neg A\vee\neg B]\bot\\
\neg(P[\neg A\vee\neg B]\neg A\wedge P[\neg A\vee\neg B]\neg B), 0\\
P[\neg A\vee\neg B]\neg\bot, 0\\
\swarrow \qquad \searrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\neg P[\neg A\vee\neg B]\neg A, 0 & \neg P[\neg A\vee\neg B]\neg B, 0\\
O[\neg A\vee\neg B]\neg\neg A, 0 & O[\neg A\vee\neg B]\neg\neg B, 0\\
0r_{\neg A\vee\neg B}1 & 0r_{\neg A\vee\neg B}1\\
\neg\bot, 1 & \neg\bot, 1\\
\neg\neg A, 1 & \neg\neg B, 1\\
\neg A\vee\neg B, 1 & \neg A\vee\neg B, 1\\
\swarrow \qquad \searrow & \swarrow \qquad \searrow\\
\begin{array}{cc} \neg A, 1 & \neg B, 1\\ * & A\leftrightarrow B, 1\\ & \neg A, 1\\ & * \end{array} & \begin{array}{cc} \neg A, 1 & \neg B, 1\\ A\leftrightarrow B, 1 & *\\ \neg B, 1 & \\ * & \end{array}
\end{array}$$

Det är alltså sant att om A är nödvändigt ekvivalent med B, så är A och B lika bra; och inte-A är lika bra som inte-B givet att det är nödvändigt att A och B är ekvivalenta. ■

Referenser

Beth, E. W. (1955). Semantic Entailment and Formal Derivability. Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afdeling Letterkunde, N.S., vol. 18, nr. 13, Amsterdam, ss. 309–342. Publicerad på nytt i *Hintikka, J.* (1969), ss. 9–41.

Beth, E. W. (1959). *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam.

Chisholm, R. M. (1963). Contrary-to-duty Imperatives and Deontic Logic. *Analysis* 24, ss. 33–36.

D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle R. & Posegga J. (red.). (1999). *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Danielsson, S. (1968). *Preference and Obligation: Studies in the Logic of Ethics*. Filosofiska föreningen, Uppsala.

Fitting, M. (1972). Tableau methods of proof for modal logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 13, ss. 237–247.

Fitting, M. (1983). *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logic*. D. Reidel, Dordrecht.

Fitting, M. (1999). Introduction. I *D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle R. & Posegga J.* (red.). (1999), ss. 1–43.

Gabbay, D. & Guenthner F. (red.). (1984). *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 2, D. Reidel.

Gabbay, D. & Guenthner, F. (red.). (2002). *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. 8, D. Reidel.

Gabbay, D., Horty, J., Parent, X., van der Meyden, E. & van der Torre, L. (red.). (2013). *Handbook of Deontic Logic and Normative Systems*. College Publications.

Hansson, B. (1969). An Analysis of Some Deontic Logics. *Noûs* 3, ss. 373–398. Tryckt på nytt i Hilpinen, R. (red.). (1971), ss. 121–147.

Hilpinen, R. (red.). (1971). *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Hilpinen, R. (red.). (1981). *New Studies in Deontic Logic Norms, Actions, and the Foundation of Ethics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Hintikka, J. (1969). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford Readings in Philosophy, Oxford University Press, Oxford.

Jeffrey, R. C. (1967). *Formal Logic: Its Scope and Limits*. McGraw-Hill, New York.

Kripke, S. A. (1959). A Completeness Theorem in Modal Logic. *The Journal of Symbolic Logic* 24, ss. 1–14.

Lenk, H., & Berkemann J. (red.). (1974). *Normenlogik: Grundprobleme der deontischen Logik*. UTB, 414, Verlag Dokumentation, Pullach (near München).

Lewis, D. (1973). *Counterfactuals*. Basil Blackwell, Oxford.

Lewis, D. (1974). Semantic analysis for dyadic deontic logic. I *Stenlund, S.* (red.). (1974), ss. 1–14.

Mally, E. (1926). *Grundgesetze des Sollens Elemente der Logik des Willens*. Leuschner and Lubensky, Graz.

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge University Press, Cambridge.

Prior, A. (1954). The Paradoxes of Derived Obligation. *Mind* 63, ss. 64–65.

Rescher, N. (1958). An axiom system for deontic logic. *Philosophical studies*, Vol. 9, ss. 24–30.

Rönnedal, D. (2009). Counterfactuals and Semantic Tableaux. *Logic and Logical Philosophy*, Vol. 18, Nr. 1, ss. 71–91.

Rönnedal, D. (2009b). Dyadic Deontic Logic and Semantic Tableaux. *Logic and Logical Philosophy*, Vol. 18, Nr. 3–4, ss. 221–252.

Rönnedal, D. (2010). *An Introduction to Deontic Logic*. Charleston, SC.

Rönnedal, D. (2012). *Extensions of Deontic Logic: An Investigation into some Multi-Modal Systems*, Department of Philosophy, Stockholm University.

Rönnedal, D. (2015). Dyadisk Deontisk Logik: En Härledning av Några Teorem. *Filosofiska Notiser*, Årgång 2, Nr. 2, ss. 19–52.

Smullyan, R. M. (1963). A unifying Principle in Quantificational Theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 49, 6, ss. 828–832.

Smullyan, R. M. (1965). Analytic Natural Deduction. *Journal of Symbolic Logic* 30, ss. 123–139.

Smullyan, R. M. (1966). Trees and Nest Structures. *Journal of Symbolic Logic* 31, ss. 303–321.

Smullyan, R. M. (1968). *First-Order Logic*. Heidelberg, Springer-Verlag.

Stenlund, S. (red.). (1974). *Logical Theory and Semantical Analysis*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

van Fraassen, B. C. (1972). The Logic of Conditional Obligation. *Journal of Philosophical Logic* 1, ss. 417–438.

van Fraassen, B. C. (1973). Values and the Heart's Command. *The Journal of Philosophy* LXX, ss. 5–19.

von Kutschera, F. (1974). Normative Präferenzen und bedingte Gebote. I *Lenk, H., & Berkemann J.* (red.). (1974), ss. 137–165.

von Wright, G. H. (1951). Deontic Logic. *Mind* 60, ss. 1–15.

von Wright, G. H. (1964). A new system of deontic logic. *Danish yearbook of philosophy*, Vol. 1, ss. 173–182.

Åqvist, L. (1971). Revised foundations for imperative-epistemic and interrogative logic. *Theoria*, Vol. 37, Nr. 1, ss. 33–73.

Åqvist, L. (1973). Modal Logic with Subjunctive Conditionals and Dispositional Predicates. *Journal of Philosophical Logic*. Vol. 2, Nr. 1, ss. 1–76.

Åqvist, L. (1984). Deontic Logic. I *Gabbay, D. & Guenthner F.* (red.). (1984), ss. 605–714.

Åqvist, L. (1987). *Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems*. Bibliopolis, Naples.

Åqvist, L. (2002). Deontic Logic. I *Gabbay, D. & Guenthner, F.* (red.). (2002), ss. 147–264.

Daniel Rönnedal
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
daniel.ronnedal@philosophy.su.se