# Konsistens, Inkonsistens och Strikt Implikation i Aletisk-Deontisk Logik

Daniel Rönnedal

**Abstrakt**
Aletisk-deontisk logik är en typ av bimodallogik som innehåller två typer av modala operatorer: aletiska och deontiska. De aletiska operatorerna kan användas för att symbolisera uttryck såsom: ”Det är nödvändigt att”, ”Det är möjligt att” och ”Det är omöjligt att”; och de deontiska operatorerna kan användas för att formalisera uttryck såsom ”Det bör vara fallet att”, ”Det får vara fallet att” och ”Det är fel att”. Alla dessa uttryck symboliseras med hjälp av monadiska satsoperatorer. En monadisk satsoperator tar en sats som argument och ger en sats som värde. Jag har i tidigare arbeten beskrivit en mängd aletisk-deontiska system (Rönnedal (2012), (2012b), (2015b)). I den här uppsatsen visar jag hur man i dessa system kan definiera tre dyadiska satsoperatorer som kan användas för att säga att två propositioner (sakförhållanden) är konsistenta eller inkonsistenta eller att en proposition (ett sakförhållande) strikt implicerar (medför) en (annan) proposition (ett (annat) sakförhållande). En dyadisk satsoperator är en satsoperator som tar två satser som argument och ger en sats som värde. Jag åskådliggör hur man med hjälp av dessa definitioner kan härleda en mängd semantiska tablåregler. Dessutom bevisar jag flera intressanta teorem som innehåller uttrycken ”konsistens”, ”inkonsistens” och ”strikt implikation”.

## 1. Introduktion

Under senare delen av 1900-talet var modallogiker främst intresserade av modala ord såsom ”nödvändig”, ”möjlig” och ”omöjlig”. Sådana ord tycks kunna användas för att tillskriva propositioner eller sakförhållanden ett slags modala egenskaper. Satsen ”Det är nödvändigt att 2 + 2 = 4” tycks t.ex. kunna användas för att tillskriva propositionen (sakförhållandet) att 2 + 2 = 4 egenskapen att vara nödvändig (nödvändigt). En av modallogikens pionjärer, Clarence Irving Lewis, var emellertid lika eller mer intresserad av modala uttryck såsom ”konsistens”, ”inkonsistens” och ”strikt implikation” (Lewis (1918), Lewis & Langford (1932)). Konsistens, inkonsistens och logisk följd har ofta betraktats som ett slags metalogiska begrepp. Konsistens och inkonsistens är egenskaper hos mängder av satser och logisk följd en relation mellan mängder av satser och enskilda satser. I modern symbolisk logik relativiseras dessa begrepp ofta till olika formella system; man talar om konsistens, inkonsistens och logisk följd i relation till ett visst system. Sådana uttryck tycks emellertid även kunna användas för att tala om modala relationer mellan propositioner eller sakförhållanden. Satsen ”Påståendet att Sokrates är en människa som inte är förnuftig är inkonsistent med påståendet att alla människor är förnuftiga” tycks t.ex. kunna användas för att säga något om relationen mellan propositionen (sakförhållandet) att Sokrates är en människa som inte är förnuftig och propositionen (sakförhållandet) att alla människor är förnuftiga, nämligen att den förra inte är konsistent med den senare. Propositionen (sakförhållandet) att alla människor är förnuftiga djur tycks strikt implicera (medföra) propositionen (sakförhållandet) att Sokrates är ett förnuftigt djur. Lewis inför vissa dyadiska satsoperatorer som gör det möjligt att tala om konsistens, inkonsistens och strikt implikation direkt i ett objektspråk. Jag har i tidigare arbeten beskrivit en mängd aletisk-deontiska system (Rönnedal (2012), (2012b), (2015), (2015b), (2015c)). I den här uppsatsen visar jag hur man i dessa system kan definiera tre dyadiska satsoperatorer som kan användas för att säga att två propositioner (sakförhållanden) är konsistenta eller inkonsistenta eller att en proposition (ett sakförhållande) strikt implicerar (medför) en (annan) proposition (ett (annat) sakförhållande). En dyadisk satsoperator är en satsoperator som tar två satser som argument och ger en sats som värde. Jag åskådliggör hur man med hjälp av dessa definitioner kan härleda en mängd semantiska tablåregler. Dessutom bevisar jag flera intressanta teorem som innehåller uttrycken ”konsistens”, ”inkonsistens” och ”strikt implikation”.[1]

Uppsatsen är indelad i fem avsnitt. Avsnitt 2 handlar om syntax. I Avsnitt 3 beskriver jag den semantik som är gemensam för alla system som beskrivs i den här artikeln. Avsnitt 4 handlar om bevisteori. Jag går igenom ett antal härledda tablåregler och ger prov på hur dessa kan användas i olika bevis. Avsnitt 5 innehåller en mängd intressanta teorem som involverar uttrycken ”konsistent”, ”inkonsistent” och ”strikt implikation”.

---

[1] För mer information om aletisk modallogik, se t.ex. Chellas (1980), Blackburn m.fl. (2001), Blackburn, van Benthem & Wolter (red.) (2007), Fitting & Mendelsohn (1998), Gabbay (1976), Gabbay & Guenthner (2001), Kracht (1999), Garson (2006), Girle (2000), Lewis & Langford (1932), Popkorn (1994), Segerberg (1971), och Zeman (1973). Gabbay m.fl. (2013), Hilpinen (1971), (1981), Rönnedal (2010) (2012b), och Åqvist (1987), (2002), innehåller mer information om deontisk logik. Se också Anderson (1956), (1958), (1959), (1967), Gabbay m.fl. (2003).

## 2. Syntax

Jag använder i grund och botten samma syntax som i Rönnedal (2015b). Den enda skillnaden är att jag introducerar ett antal nya definitioner i den här uppsatsen. Vårt språk L består av följande alfabet och satser.

### 2.1. Alfabet

En mängd satsbokstäver $p$, $q$, $r$, $s$, $p_1$, $q_1$, $r_1$, $s_1$, $p_2$, $q_2$, $r_2$, $s_2$, …
De satslogiska konnektiven $\neg$ (negation), $\wedge$ (konjunktion),
$\vee$ (disjunktion), $\supset$ (materiell implikation) och $\equiv$ (materiell ekvivalens).
De modala operatorerna $\Box$, $\Diamond$, och $\diamondminus$.
De deontiska operatorerna O, P och F.
Parenteser ) och (.

### 2.2. Satser

Språket L består av alla satser (välformade formler) som genereras från följande villkor.

Varje satsbokstav är en (atomär) sats.
Om A och B är satser, så är $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ och $(A \equiv B)$ satser.
Om B är en sats, så är också $\neg B$, $\Box B$, $\Diamond B$, $\diamondminus B$, OB, PB, och FB satser.
Ingenting annat är en sats.

### 2.3 Definitioner

$\boxminus B =_{df} \neg\Box B$, $(A \bigcirc B) =_{df} \Diamond(A \wedge B)$, $(A \ominus B) =_{df} \neg(A \bigcirc B)$ (eller $\neg\Diamond(A \wedge B)$ eller $\diamondminus(A \wedge B)$), $(A \Rightarrow B) =_{df} \Box(A \supset B)$, $(A \Leftrightarrow B) =_{df} ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$ (eller $(\Box(A \supset B) \wedge \Box(B \supset A))$ eller $\Box(A \equiv B)$), $KA =_{df} (PA \wedge P\neg A)$, $NA =_{df} \neg KA$ (eller $OA \vee O\neg A$).

A, B, C, D… representerar godtyckliga satser i språket (inte nödvändigtvis atomära). De satslogiska konnektiven är välkända från satslogiken. Parenteser runt välformade formler utelämnas i regel om ingen mångtydighet uppstår. Övriga satser i språket läses på följande sätt:

$\Box B$: Det är nödvändigt att B.
$\Diamond B$: Det är möjligt att B.
$\diamondminus B$: Det är omöjligt att B.
OB: Det bör vara fallet (är obligatoriskt) att B.
PB: Det är tillåtet (får vara fallet) att B.

FB: Det är förbjudet (fel) att B.
$\boxminus$B: Det är inte nödvändigt (onödvändigt) att B.
KA: Det är frivilligt att A.
NA: Det är inte frivilligt att A.
$A \bigcirc B$: A är konsistent (förenlig) med B.
$A \ominus B$: A är inkonsistent (oförenlig) med B.
$A \Rightarrow B$: A implicerar strikt (medför) B.
$A \Leftrightarrow B$: A är strikt ekvivalent med B.

Notera att $\Box$, $\Diamond$, $\diamondminus$, $\boxminus$, O, P, F, K och N är monadiska satsoperatorer som tar en sats som argument och ger en sats som värde, medan $\bigcirc$, $\ominus$, $\Rightarrow$, och $\Leftrightarrow$ är dyadiska satsoperatorer som tar två satser som argument och ger en sats som värde. Vi kan tolka detta som att de monadiska operatorerna tillskriver olika propositioner (sakförhållanden) olika modala eller deontiska egenskaper, medan de dyadiska operatorerna uttrycker modala relationer mellan propositioner (sakförhållanden). Vi kommer senare att se att $A \bigcirc B$ är logiskt ekvivalent med $B \bigcirc A$, att $A \ominus B$ är logiskt ekvivalent med $B \ominus A$, och att $A \Leftrightarrow B$ är logiskt ekvivalent med $B \Leftrightarrow A$. ”$A \bigcirc B$” kan därför också läsas ”A och B är konsistenta (förenliga) (med varandra)”, ”$A \ominus B$” ”A och B är inkonsistenta (oförenliga) (med varandra)”, och ”$A \Leftrightarrow B$” ”A och B är strikt ekvivalenta (med varandra)”.

## 3. Semantik

Jag använder samma semantik i den här uppsatsen som i Rönnedal (2015b). Alla grundläggande begrepp definieras på samma sätt: ramar, modeller, giltighet, satisfierbarhet, logisk följd m.m. Sanningsvillkoren för de grundläggande satserna är desamma. Låt ”$\Vdash_{M, w}$ B” stå för att B är sann i den möjliga världen w i modellen M. ”omm” är en förkortning av ”om och endast om”. Då kan vi härleda följande sanningsvillkor för de nya definierade satserna som innehåller dyadiska operatorer:

$\Vdash_{M, w} A \bigcirc B$ omm för minst en möjlig värld $w' \in W$ sådan att Rww’: $\Vdash_{M, w'}$ A och $\Vdash_{M, w'}$ B.
$\Vdash_{M, w} A \ominus B$ omm för alla möjliga världar $w' \in W$ sådana att Rww’: $\Vdash_{M, w'} \neg A$ eller $\Vdash_{M, w'} \neg B$.
$\Vdash_{M, w} A \Rightarrow B$ omm för alla möjliga världar $w' \in W$ sådana att Rww’: inte $\Vdash_{M, w'}$ A eller $\Vdash_{M, w'}$ B.
$\Vdash_{M, w} A \Leftrightarrow B$ omm för alla möjliga världar $w' \in W$ sådana att Rww’: $\Vdash_{M, w'}$ A omm $\Vdash_{M, w'}$ B.

### 3.1. Villkor på ramar och klasser av ramar och deras logik

Jag använder exakt samma villkor på ramar som i Rönnedal (2015b), och dessa ramar kan klassificeras på samma sätt som i tidigare arbeten. Genom att införa olika villkor på våra ramar kan vi även, som vanligt, definiera en mängd logiska system. Se Rönnedal (2015b) för mer information om detta.

## 4. Bevisteori

Jag använder samma bimodala aletisk-deontiska tablåsystem i den här uppsatsen som i Rönnedal (2015b). För att underlätta bevisen av vissa härledda regler och för att förenkla olika tablåbevis skall vi emellertid även inkludera den s.k. CUT regeln i alla våra system. För mer information om denna regel, se t.ex. Rönnedal (2009), (2012b). CUT regeln är redundant i alla system som beskrivs i Rönnedal (2015b) i den meningen att vi inte kan bevisa några nya teorem i dessa system med hjälp av denna regel.

Grundläggande begrepp, såsom träd, semantisk tablå, gren, öppen och sluten gren, teorem, bevis, härledning osv. definieras på vanligt sätt, se t.ex. Rönnedal (2012b), s. 131, eller Priest (2008).[2]

### 4.1. Tablåregler

Jag använder exakt samma satslogiska, och grundläggande modala och deontiska regler, samt samma modala och deontiska tillgänglighetsregler i den här uppsatsen som i Rönnedal (2015b). I det här avsnittet skall jag emellertid introducera en mängd härledda regler som kan användas för att förenkla olika bevis och härledningar i våra system. Bevisen för att alla dessa regler faktiskt är härledbara i våra system lämnas till läsaren. Alla satser som kan bevisas med hjälp av dessa regler, kan också bevisas utan dem. De är likväl värdefulla eftersom de kan användas för att förenkla olika bevis och härledningar i våra olika system. De flesta regler vi tar upp är härledbara i alla aletisk-deontiska tablåsystem. Men några är endast härledbara om systemet innehåller vissa tillgänglighetsregler. Reglerna i Tabell 7 är t.ex. endast härledbara om systemet innehåller regeln T-MO (se Rönnedal (2015b)).

[2] För mer information om den s.k. tablåmetoden, se t.ex. Beth (1955) och Beth (1959), ss. 186–201, 267–293, och 444–463, Gentzen (1935) och Gentzen (1935b), D’Agostino et al. (1999), Fitting & Mendelsohn (1998), Garson (2006), Jeffrey (1967), Priest (2008), Rönnedal (2012), (2012b) och Smullyan (1968).

### 4.1.1. Nya tablåregler

| $(\bigcirc)$ | $(\ominus)$ | $(\neg\bigcirc')$ | $(\bigcirc\Diamond)$ |
|---|---|---|---|
| $A \bigcirc B, i$<br>$\downarrow$<br>$irj$<br>$A, j$<br>$B, j$ | $A \ominus B, i$<br>$irj$<br>$\swarrow\searrow$<br>$\neg A, j \quad \neg B, j$ | $\neg(A \bigcirc B), i$<br>$irj$<br>$\swarrow\searrow$<br>$\neg A, j \quad \neg B, j$ | $A \bigcirc B, i$<br>$\downarrow$<br>$\Diamond(A \wedge B), i$ |

| $(\neg\bigcirc)$ | $(\neg\ominus)$ | $(\neg\ominus')$ | $(\neg\bigcirc\Diamond)$ |
|---|---|---|---|
| $\neg(A \bigcirc B), i$<br>$\downarrow$<br>$A \ominus B, i$ | $\neg(A \ominus B), i$<br>$\downarrow$<br>$A \bigcirc B, i$ | $\neg(A \ominus B), i$<br>$\downarrow$<br>$irj$<br>$A, j$<br>$B, j$ | $\neg(A \bigcirc B), i$<br>$\downarrow$<br>$\neg\Diamond(A \wedge B), i$ |

Tabell 1

| $(\bigcirc\wedge)$ | $(\ominus\Diamond)$ | $(\neg\bigcirc\Box)$ | $(\ominus\wedge)$ |
|---|---|---|---|
| $A \bigcirc B, i$<br>$\downarrow$<br>$irj$<br>$A \wedge B, j$ | $A \ominus B, i$<br>$\downarrow$<br>$\neg\Diamond(A \wedge B), i$ | $\neg(A \bigcirc B), i$<br>$\downarrow$<br>$\Box\neg(A \wedge B), i$ | $A \ominus B, i$<br>$irj$<br>$\downarrow$<br>$\neg(A \wedge B), j$ |

| $(\neg\bigcirc\wedge)$ | $(\neg\ominus\Diamond)$ | $(\neg\ominus\Box)$ | $(\neg\ominus\wedge)$ |
|---|---|---|---|
| $\neg(A \bigcirc B), i$<br>$irj$<br>$\downarrow$<br>$\neg(A \wedge B), j$ | $\neg(A \ominus B), i$<br>$\downarrow$<br>$\Diamond(A \wedge B), i$ | $A \ominus B, i$<br>$\downarrow$<br>$\Box\neg(A \wedge B), i$ | $\neg(A \ominus B), i$<br>$\downarrow$<br>$irj$<br>$A \wedge B, j$ |

Tabell 2

| $(\Rightarrow)$ | $(\Rightarrow\Box)$ | $(\Rightarrow')$ | $(\Rightarrow\diamondminus)$ |
|---|---|---|---|
| $A \Rightarrow B, i$<br>$irj$<br>$\swarrow\searrow$<br>$\neg A, j \quad B, j$ | $A \Rightarrow B, i$<br>$\downarrow$<br>$\Box(A \supset B), i$ | $A \Rightarrow B, i$<br>$irj$<br>$\downarrow$<br>$A \supset B, j$ | $A \Rightarrow B, i$<br>$\downarrow$<br>$\diamondminus(A \wedge \neg B), i$ |

| $(\neg\Rightarrow)$ | $(\neg\Rightarrow\Box)$ | $(\neg\Rightarrow')$ | $(\neg\Rightarrow\Diamond)$ |
|---|---|---|---|
| $\neg(A\Rightarrow B), i$<br>$\downarrow$<br>$irj$<br>$A, j$<br>$\neg B, j$ | $\neg(A\Rightarrow B), i$<br>$\downarrow$<br>$\neg\Box(A\supset B), i$ | $\neg(A\Rightarrow B), i$<br>$\downarrow$<br>$irj$<br>$\neg(A\supset B), j$ | $\neg(A\Rightarrow B), i$<br>$\downarrow$<br>$\Diamond\neg(A\supset B), i$ |

Tabell 3

| $(\Leftrightarrow)$ | $(\Leftrightarrow\Box)$ | $(\Leftrightarrow')$ |
|---|---|---|
| $A\Leftrightarrow B, i$<br>$\downarrow$<br>$A\Rightarrow B, i$<br>$B\Rightarrow A, i$ | $A\Leftrightarrow B, i$<br>$\downarrow$<br>$\Box(A\equiv B), i$ | $A\Leftrightarrow B, i$<br>$irj$<br>$\swarrow\searrow$<br>$A, j \quad \neg A, j$<br>$B, j \quad \neg B, j$ |
| $(\neg\Leftrightarrow)$ | $(\neg\Leftrightarrow\Box)$ | $(\neg\Leftrightarrow')$ |
| $\neg(A\Leftrightarrow B), i$<br>$\swarrow\searrow$<br>$\neg(A\Rightarrow B), i \quad \neg(B\Rightarrow A), i$ | $\neg(A\Leftrightarrow B), i$<br>$\downarrow$<br>$\neg\Box(A\equiv B), i$ | $\neg(A\Leftrightarrow B), i$<br>$\downarrow$<br>$irj$<br>$\swarrow\searrow$<br>$A, j \quad \neg A, j$<br>$\neg B, j \quad B, j$ |

Tabell 4

| $(\Leftrightarrow\Box')$ | $(\Leftrightarrow\equiv)$ | $(\Leftrightarrow\supset)$ |
|---|---|---|
| $A\Leftrightarrow B, i$<br>$\downarrow$<br>$\Box(A\supset B), i$<br>$\Box(B\supset A), i$ | $A\Leftrightarrow B, i$<br>$irj$<br>$\downarrow$<br>$A\equiv B, j$ | $A\Leftrightarrow B, i$<br>$irj$<br>$\downarrow$<br>$A\supset B, j$<br>$B\supset A, j$ |
| $(\neg\Leftrightarrow\Box')$ | $(\neg\Leftrightarrow\equiv)$ | $(\neg\Leftrightarrow\supset)$ |
| $\neg(A\Leftrightarrow B), i$<br>$\swarrow\searrow$<br>$\neg\Box(A\supset B), i \quad \neg\Box(B\supset A), i$ | $\neg(A\Leftrightarrow B), i$<br>$\downarrow$<br>$irj$<br>$\neg(A\equiv B), j$ | $\neg(A\Leftrightarrow B), i$<br>$\downarrow$<br>$irj$<br>$\swarrow\searrow$<br>$\neg(A\supset B), j \quad \neg(B\supset A), j$ |

Tabell 5

| (□⇔) | (◇⇔) | (⟠⇔) | (⊟⇔) |
|---|---|---|---|
| A⇔B, i | A⇔B, i | A⇔B, i | A⇔B, i |
| □A, i | ◇A, i | ⟠A, i | ⊟A, i |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| □B, i | ◇B, i | ⟠B, i | ⊟B, i |

| (⇔□) | (⇔◇) | (⇔⟠) | (⇔⊟) |
|---|---|---|---|
| A⇔B, i | A⇔B, i | A⇔B, i | A⇔B, i |
| □B, i | ◇B, i | ⟠B, i | ⊟B, i |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| □A, i | ◇A, i | ⟠A, i | ⊟A, i |

Tabell 6

| (O⇔) | (P⇔) | (F⇔) | (¬O⇔) |
|---|---|---|---|
| A⇔B, i | A⇔B, i | A⇔B, i | A⇔B, i |
| OA, i | PA, i | FA, i | ¬OA, i |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| OB, i | PB, i | FB, i | ¬OB, i |

| (⇔O) | (⇔P) | (⇔F) | (⇔¬O) |
|---|---|---|---|
| A⇔B, i | A⇔B, i | A⇔B, i | A⇔B, i |
| OB, i | PB, i | FB, i | ¬OB, i |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| OA, i | PA, i | FA, i | ¬OA, i |

Tabell 7

### 4.2. Tablåsystem

Ett tablåsystem är en mängd tablåregler. Detta begrepp definieras i den här uppsatsen på samma sätt som i Rönnedal (2015b). Alla regler i Tabell 1–6 ovan är härledbara i alla s.k. aletisk-deontiska system, givet att vi adderar definitionerna i Avsnitt 2.3 (och CUT regeln). Reglerna i Tabell 7 är härledbara i alla system som innehåller tablåregeln T-MO (Rönnedal (2015b)). Vi skall nu se närmare på hur dessa regler kan användas för att bevisa en mängd intressanta teorem.

### 4.3. Exempel på teorem

Det här avsnittet innehåller några teorem i olika aletisk-deontiska tablåsystem. Bevisen är ofta relativt enkla och i de flesta fall utelämnade. Jag skall emellertid gå igenom några exempel för att belysa metoden. Vårt första (meta)teorem handlar om de formella egenskaperna hos de modala relationerna konsistens, inkonsistens, strikt implikation och strikt ekvivalens.

**(Meta)Teorem 1**. **(i)** $\bigcirc$ är varken reflexiv eller irreflexiv. Dvs. det är inte fallet att $A \bigcirc A$ för alla A, och det är inte fallet att $\neg(A \bigcirc A)$ för alla A; varken $A \bigcirc A$ eller $\neg(A \bigcirc A)$ är teorem. Med andra ord, det är inte fallet att varje påstående är konsistent med sig självt, och det är inte fallet att varje påstående är inkonsistent med sig självt. **(ii)** $\bigcirc$ är symmetrisk, dvs. $(A \bigcirc B) \supset (B \bigcirc A)$ gäller för alla A och B, $(A \bigcirc B) \supset (B \bigcirc A)$ är ett teorem. Om A är konsistent med B, så är B konsistent med A. Från detta följer det att $(A \bigcirc B) \equiv (B \bigcirc A)$ är ett teorem. **(iii)** $\bigcirc$ är varken transitiv eller intransitiv. Det är inte fallet att $((A \bigcirc B) \wedge (B \bigcirc C)) \supset (A \bigcirc C)$ för alla A, B och C; $((A \bigcirc B) \wedge (B \bigcirc C)) \supset (A \bigcirc C)$ är inte ett teorem; och det är inte fallet att $((A \bigcirc B) \wedge (B \bigcirc C)) \supset \neg(A \bigcirc C)$ för alla A, B och C; $((A \bigcirc B) \wedge (B \bigcirc C)) \supset \neg(A \bigcirc C)$ är inte ett teorem. Med andra ord, det är inte sant att om A är förenlig med B och B är förenlig med C, så är A förenlig med C, för alla A, B och C; och det är inte sant att om A är förenlig med B och B är förenlig med C, så är det inte fallet att A är förenlig med C, för alla A, B och C. **(iv)** $\ominus$ är varken reflexiv eller irreflexiv. Dvs. det är inte fallet att $A \ominus A$ för alla A, och det är inte fallet att $\neg(A \ominus A)$ för alla A. Varken $A \ominus A$ eller $\neg(A \ominus A)$ är teorem. **(v)** $\ominus$ är symmetrisk, dvs. $(A \ominus B) \supset (B \ominus A)$ gäller för alla A och B, $(A \ominus B) \supset (B \ominus A)$ är ett teorem. Om A är inkonsistent med B, så är B inkonsistent med A. Från detta följer det att $(A \ominus B) \equiv (B \ominus A)$ är ett teorem. **(vi)** $\ominus$ är varken transitiv eller intransitiv. Det är inte fallet att $((A \ominus B) \wedge (B \ominus C)) \supset (A \ominus C)$ för alla A, B och C; $((A \ominus B) \wedge (B \ominus C)) \supset (A \ominus C)$ är inte ett teorem; och det är inte fallet att $((A \ominus B) \wedge (B \ominus C)) \supset \neg(A \ominus C)$ för alla A, B och C; $((A \ominus B) \wedge (B \ominus C)) \supset \neg(A \ominus C)$ är inte ett teorem. **(vii)** $\Rightarrow$ är reflexiv, och transitiv. Dvs. $A \Rightarrow A$, gäller för alla A, $A \Rightarrow A$ är ett teorem; och $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \supset (A \Rightarrow C)$ gäller för alla A, B och C, $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \supset (A \Rightarrow C)$ är ett teorem. Varje sats implicerar strikt (medför) sig själv, och om A strikt implicerar (medför) B och B strikt implicerar (medför) C, så gäller det att A strikt implicerar (medför) C. **(viii)** $\Rightarrow$ är varken symmetrisk eller asymmetrisk. Dvs. det är inte fallet att $(A \Rightarrow B) \supset (B \Rightarrow A)$ för alla A och B, $(A \Rightarrow B) \supset (B \Rightarrow A)$ är inte ett teorem; och det är inte fallet att $(A \Rightarrow B) \supset \neg(B \Rightarrow A)$ för alla A och B, $(A \Rightarrow B) \supset \neg(B \Rightarrow A)$ är inte ett teorem. Med andra ord, det är inte sant att om A strikt implicerar B, så gäller det att B strikt implicerar A, för alla A och B; och det är inte sant att om A strikt implicerar B, så gäller det att B inte strikt implicerar A, för alla A och B. **(ix)** $\Leftrightarrow$ är en ekvivalensrelation, dvs. $\Leftrightarrow$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv. Följande satser är teorem $(A \Leftrightarrow A)$, $(A \Leftrightarrow B) \supset (B \Leftrightarrow A)$, och $((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \supset (A \Leftrightarrow C)$, där A, B, och C kan bytas ut mot vilka satser som helst. Från detta följer det att $(A \Leftrightarrow B) \equiv (B \Leftrightarrow A)$. Varje sats är strikt ekvivalent med sig själv; om A är strikt ekvivalent med B, så är B strikt ekvivalent med A; och om A är strikt ekvivalent med B och B är strikt ekvivalent med C, så är A strikt ekvivalent med C. (**(i)**–**(ix)** gäller t.ex. i alla system som beskrivs i Rönnedal (2015b).)

*Bevis*. Lämnas till läsaren.

Vårt nästa (meta)teorem visar att ”alla” modala begrepp (i den här uppsatsen) i princip är interdefinierbara, definierbara i termer av varandra.

**(Meta)Teorem 2.** Alla de modala operatorerna $\Box$, $\Diamond$, $\diamondminus$, $\boxminus$, $\bigcirc$, $\ominus$, och $\Rightarrow$ är interdefinierbara. Detta innebär att det i princip är möjligt att konstruera ett språk som innehåller endast en av dessa operatorer som primitivt begrepp, och att alla andra modala operatorer definieras i termer av denna primitiva operator. Mer exakt, detta teorem innebär att **(i)** alla satser i Tabell 8 och 9, samt i fotnot 3, kan bevisas i alla våra aletisk-deontiska system. **(ii)** Låt T vara en sats i Tabell 8 eller 9 och låt T’ vara exakt likadan som T förutom att $\equiv$ har bytts ut mot $\Leftrightarrow$. Då är T’ ett teorem i alla våra aletisk-deontiska system.

*Bevis*. Några av satserna i Tabell 8 och några av satserna i Tabell 9 är sanna per definition i det språk som vi använder i den här uppsatsen, t.ex. $(A \ominus B) \equiv \neg(A \bigcirc B)$. Andra satser behöver bevisas. Det kan vi göra genom att först översätta satserna till primitiv notation och sedan skapa slutna tablåer för deras negationer. Men vi kan också bevisa dessa satser med hjälp av de härledda reglerna i Avsnitt 4.1.1.

| Konsistens | Inkonsistens | Strikt implikation |
|---|---|---|
| $\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)$ | $\Diamond A \equiv \neg(A \ominus A)$ | $\Diamond A \equiv \neg(A \Rightarrow \neg A)$ |
| $\diamondminus A \equiv \neg(A \bigcirc A)$ | $\diamondminus A \equiv (A \ominus A)$ | $\diamondminus A \equiv (A \Rightarrow \neg A)$ |
| $\Box A \equiv \neg(\neg A \bigcirc \neg A)$ | $\Box A \equiv (\neg A \ominus \neg A)$ | $\Box A \equiv (\neg A \Rightarrow A)$ |
| $\boxminus A \equiv (\neg A \bigcirc \neg A)$ | $\boxminus A \equiv \neg(\neg A \ominus \neg A)$ | $\boxminus A \equiv \neg(\neg A \Rightarrow A)$ |
| $(A \ominus B) \equiv \neg(A \bigcirc B)$ | $(A \bigcirc B) \equiv \neg(A \ominus B)$ | $(A \bigcirc B) \equiv \neg(A \Rightarrow \neg B)$ |
| $(A \Rightarrow B) \equiv \neg(A \bigcirc \neg B)$ | $(A \Rightarrow B) \equiv (A \ominus \neg B)$ | $(A \ominus B) \equiv (A \Rightarrow \neg B)$ |
| $(A \Leftrightarrow B) \equiv (\neg(A \bigcirc \neg B) \wedge \neg(B \bigcirc \neg A))$ | $(A \Leftrightarrow B) \equiv ((A \ominus \neg B) \wedge (B \ominus \neg A))$ | $(A \Leftrightarrow B) \equiv ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$ |

Tabell 8

Låt mig gå igenom ett exempel. $\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)$ är per definition ekvivalent med $\Diamond A \equiv \Diamond(A \wedge A)$. Så, för att bevisa $\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)$ räcker det med att vi skapar en sluten tablå för $\neg(\Diamond A \equiv \Diamond(A \wedge A))$. Jag skall emellertid bevisa $\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)$ med hjälp av några härledda regler.

(1) $\neg(\Diamond A \equiv (A \bigcirc A))$, 0

↙ ↘

| | |
|---|---|
| (2) $\Diamond A$, 0 [1, $\neg\leftrightarrow$] | (3) $\neg\Diamond A$, 0 [1, $\neg\leftrightarrow$] |
| (4) $\neg(A \bigcirc A)$, 0 [1, $\neg\leftrightarrow$] | (5) $A \bigcirc A$, 0 [1, $\neg\leftrightarrow$] |
| (6) $A \ominus A$, 0 [4, $\neg\bigcirc$] | (7) $\Box\neg A$, 0 [3, $\neg\Diamond$] |
| (8) 0r1 [2, $\Diamond$] | (9) 0r1 [5, $\bigcirc$] |
| (10) A, 1 [2, $\Diamond$] | (11) A, 1 [5, $\bigcirc$] |
| ↙ ↘ | (12) A, 1 [5, $\bigcirc$] |
| (13) $\neg A$, 1 [6, 8, $\ominus$] (14) $\neg A$, 1 [6, 8, $\ominus$] | (15) $\neg A$, 1 [7, 9, $\Box$] |
| (16) * [10, 13] (17) * [10, 14] | (18) * [12, 15] |

Alla grenar i detta träd är slutna. Alltså är den ovanstående tablån ett bevis för $\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)$. Intuitivt innebär detta att antagandet att $\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)$ är falsk leder till en motsägelse, varför $\Diamond A \equiv (A \bigcirc A)$ måste vara sann. Övriga satser bevisas på liknande sätt.

| Nödvändighet | Möjlighet | Omöjlighet |
|---|---|---|
| $\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$ | $\diamondminus A \equiv \neg\Diamond A$ | $\Diamond A \equiv \neg\diamondminus A$ |
| $\diamondminus A \equiv \Box\neg A$ | $\Box A \equiv \neg\Diamond\neg A$ | $\Box A \equiv \diamondminus\neg A$ |
| $\boxminus A \equiv \neg\Box A$ | $\boxminus A \equiv \Diamond\neg A$ | $\boxminus A \equiv \neg\diamondminus\neg A$ |
| $(A \bigcirc B) \equiv \neg\Box\neg(A \wedge B)$ | $(A \bigcirc B) \equiv \Diamond(A \wedge B)$ | $(A \bigcirc B) \equiv \neg\diamondminus(A \wedge B)$ |
| $(A \ominus B) \equiv \Box\neg(A \wedge B)$ | $(A \ominus B) \equiv \neg\Diamond(A \wedge B)$ | $(A \ominus B) \equiv \diamondminus(A \wedge B)$ |
| $(A \Rightarrow B) \equiv \Box(A \supset B)$ | $(A \Rightarrow B) \equiv \neg\Diamond\neg(A \supset B)$ | $(A \Rightarrow B) \equiv \diamondminus\neg(A \supset B)$ |
| $(A \Leftrightarrow B) \equiv \Box(A \equiv B)$ | $(A \Leftrightarrow B) \equiv \neg\Diamond\neg(A \equiv B)$ | $(A \Leftrightarrow B) \equiv \diamondminus\neg(A \equiv B)$ |

Tabell 9[3]

Dessa resultat förtjänar några kommentarer. Kolumn 1 i Tabell 8 visar hur uttrycken ”det är möjligt att”, ”det är omöjlig att”, ”det är nödvändig att”, och ”det är inte nödvändigt att” kan definieras i termer av konsistens. Kolumn 2 i Tabell 8 visar hur dessa uttryck kan definieras i termer av inkonsistens, och kolumn 3 visar hur de kan definieras i termer av strikt implikation. Vidare

[3] Motsvarande ”definitioner” i termer av $\boxminus$ ser ut på följande sätt: $\Box A \equiv \neg\boxminus A$; $\Diamond A \equiv \boxminus\neg A$; $\diamondminus A \equiv \neg\boxminus\neg A$; $(A \bigcirc B) \equiv \boxminus\neg(A \wedge B)$; $(A \ominus B) \equiv \neg\boxminus\neg(A \wedge B)$; $(A \Rightarrow B) \equiv \neg\boxminus(A \supset B)$; $(A \Leftrightarrow B) \equiv \neg\boxminus(A \equiv B)$.

kan vi se hur ”inkonsistens”, ”strikt implikation” och ”strikt ekvivalens” kan definieras i termer av ”konsistens” (kolumn 1 i Tabell 8). Vi kan se hur ”konsistens”, ”strikt implikation” och ”strikt ekvivalens” kan definieras i termer av ”inkonsistens” (kolumn 2 i Tabell 8) osv. Om $A \circ A$, så skall vi säga att A är ”självkonsistent”, och om $A \ominus A$ att A är ”självinkonsistent”. Om $A \Rightarrow \neg A$, skall vi säga att A är ”självmotsägande”. Satserna i tabellerna visar på några intressanta samband mellan våra grundläggande modala begrepp. Följande ekvivalenser gäller t.ex. i alla system:

(i) A är motsägelsefri (A säger inte emot sig själv) omm det inte är fallet att A implicerar (medför) sin egen negation (dvs. det är inte fallet att A medför inte-A) omm A är självkonsistent (dvs. A är konsistent med sig själv) omm A är konsistent med A omm A är möjlig (dvs. det är möjligt att A). Påståendet att A är möjlig kan alltså uttryckas på flera ekvivalenta sätt, t.ex. ”Det är möjligt att A”, ”A är möjlig”, ”A är självkonsistent”, ”A är motsägelsefri”, ”A säger inte emot sig själv”, ”A implicerar inte sin egen negation”, ”Det är inte fallet att A medför inte-A”.

(ii) A är självmotsägande (dvs. A säger emot sig själv) omm A implicerar (medför) sin egen negation (dvs. A medför inte-A) omm A är självinkonsistent (dvs. A är inkonsistent med sig själv) omm A är inkonsistent med A omm A är omöjlig (dvs. det är omöjligt att A). Tanken att A är omöjlig kan således uttryckas på flera ekvivalenta sätt, t.ex. ”Det är omöjligt att A”, ”A är omöjlig”, ”A är självinkonsistent”, ”A är motsägelsefull”, ”A säger emot sig själv”, ”A implicerar sin egen negation”, ”A medför inte-A”.

(iii) Det är nödvändigt att A omm inte-A är självinkonsistent (dvs. inte-A är inkonsistent med sig själv) omm inte-A är inkonsistent med inte-A omm negationen av A är självmotsägande (dvs. inte-A säger emot sig själv) omm negationen av A implicerar (medför) A (dvs. inte-A medför A). Propositionen att A är nödvändig kan alltså uttryckas på flera olika ekvivalenta sätt, t.ex. ”Det är nödvändigt att A”, ”A är nödvändig”, ”A måste vara fallet”, ”inte-A är självmotsägande”, ”inte-A säger emot sig själv”, ”inte-A implicerar sin egen negation”, ”inte-A implicerar A”. Osv.

## C I Lewis teorem

I Kapitel VI i Lewis & Langford (1932) bevisar Lewis en mängd intressanta teorem som innehåller symboler som representerar konsistens, möjlighet och strikt implikation. Lewis använder en axiomatisk metod. Han utgår ifrån en mängd postulat och slutledningsregler och bevisar med hjälp av dessa sina satser. I Appendix II i samma bok beskriver han en mängd modallogiska system. Hans framställning av dessa modallogiska system är i många avseenden banbrytande. I (Meta)Teorem 3 nedan demonstrerar vi att alla de postulat och teorem som kan uttryckas i vårt språk L och som Lewis bevisar i Kapitel VI i Lewis & Langford (1932) också kan bevisas i våra tablåsystem. De flesta teorem kan bevisas i alla system, men vissa deduktioner kräver tillgång till tablåregeln T-aT (se Rönnedal (2015b)).

I min framställning av Lewis teorem kommer jag att använda följande förkortningar. Jag använder en punkt ”.” för konjunktion, stället för ”$\wedge$”. Konjunktioner av formen $(A.(B.C))$ eller $((A.B).C)$ förkortas $(A.B.C)$ osv. ”Disjunktioner” förkortas på samma sätt. $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow D\ldots$ osv. är en sammanfattning av följande teorem: $A \Leftrightarrow B$ och $B \Leftrightarrow C$ och $C \Leftrightarrow D\ldots$ osv. Från detta följer det också att $A \Leftrightarrow C$, $A \Leftrightarrow D$, $B \Leftrightarrow A$, $B \Leftrightarrow D$, $C \Leftrightarrow A$, $C \Leftrightarrow B\ldots$ osv. Framställningen av teoremen liknar därmed Lewis, även om jag använder en något annan notation.

**(Meta)Teorem 3.** Låt T vara ett axiom (postulat) eller ett teorem i Kapitel VI i Lewis och Langford (1932) som kan uttryckas i vårt språk L. Låt S vara något av våra tablåsystem som innehåller tablåregeln T-aT. Då är T ett teorem i S. Notera dock att många, men inte alla, av Lewis satser kan bevisas utan T-aT.

*Bevis*. Teoremet kan bevisas genom att för varje sats A i Tabellerna 10–14 skapa en sluten tablå för $\neg A$. Bevisen lämnas till läsaren.

---

$(p\vee q)\Leftrightarrow\neg(\neg p.\neg q)$; $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow\neg\Diamond(p.\neg q)$; $(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow((p\Rightarrow q).(q\Rightarrow p))$;
$(p.q)\Rightarrow(q.p)$; $(p.q)\Rightarrow p$; $p\Rightarrow(p.p)$; $((p.q).r)\Rightarrow(p.(q.r))$; $p\Rightarrow\neg\neg p$;
$((p\Rightarrow q).(q\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow r)$; $(p.(p\Rightarrow q))\Rightarrow q$; $p\Rightarrow p$; $p\Leftrightarrow p$; $(p\Leftrightarrow q)\Rightarrow(q\Leftrightarrow p)$;
$((p\Leftrightarrow q).(q\Leftrightarrow r))\Rightarrow(p\Leftrightarrow r)$; $(p.q)\Leftrightarrow(q.p)$; $(p.q)\Rightarrow q$; $(\neg p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg q\Rightarrow p)$;
$\neg\neg p\Rightarrow p$; $p\Leftrightarrow\neg\neg p$; $(\neg p\Rightarrow q)\Rightarrow(\neg q\Rightarrow p)$; $(\neg p\Rightarrow\neg q)\Rightarrow(q\Rightarrow p)$;
$(p\Rightarrow\neg q)\Rightarrow(q\Rightarrow\neg p)$; $(p\Rightarrow q)\Rightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)$; $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)$;
$(p\Rightarrow\neg q)\Leftrightarrow(q\Rightarrow\neg p)$; $((p.q).r)\Leftrightarrow(p.(q.r))\Leftrightarrow(q.(p.r))\Leftrightarrow((q.p).r)$ etc. etc.;
$((p.q)\Rightarrow r)\Leftrightarrow((q.\neg r)\Rightarrow\neg p)\Leftrightarrow((p.\neg r)\Rightarrow\neg q)$; $((p.q)\Rightarrow r)\Rightarrow((p.\neg r)\Rightarrow\neg q)$;
$((p.q)\Rightarrow r)\Rightarrow((q.\neg r)\Rightarrow\neg p)$; $p\Leftrightarrow(p.p)$; $\neg p\Rightarrow\neg(p.q)$; $\neg q\Rightarrow\neg(p.q)$;
$((q\Rightarrow r).(p\Rightarrow q))\Rightarrow(p\Rightarrow r)$; $((p\Rightarrow q).((q.r)\Rightarrow s))\Rightarrow((p.r)\Rightarrow s)$;
$((p\Rightarrow q).(q\Rightarrow r).(r\Rightarrow s))\Rightarrow(p\Rightarrow s)$; $(p.\neg q)\Rightarrow\neg(p\Rightarrow q)$; $(p\Rightarrow q)\Rightarrow\neg(p.\neg q)$;
$(p.q)\Rightarrow\neg(p\Rightarrow\neg q)$; $(p\Rightarrow\neg q)\Rightarrow\neg(p.q)$; $p\Rightarrow\neg(p\Rightarrow\neg p)$; $(p\Rightarrow\neg p)\Rightarrow\neg p$;
$(\neg p\Rightarrow p)\Rightarrow p$; $\neg p\Rightarrow\neg(\neg p\Rightarrow p)$; $\neg(p.\neg p)$; $(p\vee q)\Rightarrow(q\vee p)$; $(p\vee q)\Leftrightarrow(q\vee p)$;
$p\Rightarrow(p\vee q)$; $q\Rightarrow(p\vee q)$; $(p\vee p)\Rightarrow p$; $p\Leftrightarrow(p\vee p)$; $(p\vee(q\vee r))\Rightarrow((p\vee q)\vee r)$;
$(p\vee(q\vee r))\Leftrightarrow((p\vee q)\vee r)\Leftrightarrow(q\vee(p\vee r))\Leftrightarrow((q\vee p)\vee r)$ etc. etc.; $p\vee\neg p$

---

Tabell 10. Grundläggande axiom (postulat) och teorem

$(p \supset q) \Leftrightarrow \neg(p . \neg q)$; $(p \equiv q) \Leftrightarrow ((p \supset q) . (q \supset p))$; $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \supset q)$;
$\neg(p \supset q) \Leftrightarrow (p . \neg q)$; $(p \supset q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$; $(p . q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$; $(p \vee p) \supset p$;
$q \supset (p \vee q)$; $(p \vee q) \supset (q \vee p)$; $(p \vee (q \vee r)) \Rightarrow (q \vee (p \vee r))$; $(p \vee (q \vee r)) \supset (q \vee (p \vee r))$;
$((p . q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \supset r)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \supset r))$; $(q \supset r) \Rightarrow ((p \vee q) \supset (p \vee r))$;
$(q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$; $(p . (p \supset q)) \Rightarrow q$; $((p \supset q) . (q \supset r)) \Rightarrow (p \supset r)$;
$((p \supset q) . (q \supset r)) \supset (p \supset r)$; $((q \supset r) . (p \supset q)) \Rightarrow (p \supset r)$; $((q \supset r) . (p \supset q)) \supset (p \supset r)$;
$(p . (p \supset q)) \supset q$; $(p \supset q) \Leftrightarrow (\neg q \supset \neg p)$; $(p \supset q) \Rightarrow (\neg q \supset \neg p)$; $(p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$;
$p \Rightarrow (q \supset p)$; $p \supset (q \supset p)$; $\neg p \Rightarrow (p \supset q)$; $\neg p \supset (p \supset q)$; $p \Leftrightarrow (\neg p \supset p)$;
$\neg p \Leftrightarrow (p \supset \neg p)$; $\neg(p \supset q) \Rightarrow (p \supset \neg q)$; $\neg(p \supset q) \supset (p \supset \neg q)$; $\neg(p \supset \neg q) \Rightarrow (p \supset q)$;
$\neg(p \supset \neg q) \supset (p \supset q)$; $\neg(p \supset q) \Rightarrow (q \supset p)$; $\neg(p \supset q) \supset (q \supset p)$; $\neg(p \supset q) \Rightarrow (\neg p \supset q)$;
$\neg(p \supset q) \supset (\neg p \supset q)$; $\neg(p \supset q) \Rightarrow (q \supset \neg p)$; $\neg(p \supset q) \supset (q \supset \neg p)$;
$\neg(p \supset q) \Rightarrow (\neg p \supset \neg q)$; $\neg(p \supset q) \supset (\neg p \supset \neg q)$; $(p \supset q) \vee (p \supset \neg q)$;
$((p . q) \supset r) \Leftrightarrow (p \supset (q \supset r)) \Leftrightarrow (q \supset (p \supset r))$; $((p . q) \supset r) \Rightarrow (p \supset (q \supset r))$;
$(p \supset (q \supset r)) \Rightarrow ((p . q) \supset r)$; $((p . q) \supset r) \supset (p \supset (q \supset r))$; $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p . q) \supset r)$;
$(p \supset q) \Rightarrow ((q \supset r) \supset (p \supset r))$; $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$;
$(q \supset r) \Rightarrow ((p \supset q) \supset (p \supset r))$; $(q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$;
$((p . q) \supset r) \Leftrightarrow ((p . \neg r) \supset \neg q) \Leftrightarrow ((q . \neg r) \supset \neg p)$; $((p \supset q) . ((q . r) \supset s)) \Rightarrow ((p . r) \supset s)$;
$((p \supset q) . (q . r) \supset s) \supset ((p . r) \supset s)$

Tabell 11. Teorem som innehåller materiell implikation

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p . r) \Rightarrow (q . r))$; $(p \supset q) \Rightarrow ((p . r) \supset (q . r))$; $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \Rightarrow (q \vee r))$;
$(p \supset q) \Rightarrow ((p \vee r) \supset (q \vee r))$; $((p \Rightarrow q) . (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q . r))$; $(p . (p \supset q)) \Rightarrow (p . q)$;
$(p . (p \supset q)) \Leftrightarrow (p . q)$; $(p . q) \Leftrightarrow (p . \neg(p . \neg q))$; $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (p . q))$;
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \vee q) \Rightarrow q)$; $p \Leftrightarrow ((p \vee q) . p)$; $((p \Rightarrow r) . (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$;
$(p \Rightarrow (q . r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) . (p \Rightarrow r))$; $((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) . (q \Rightarrow r))$;
$((p \Rightarrow r) . (q \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p . q) \Rightarrow (r . s))$; $((p \Rightarrow r) . (q \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow (r \vee s))$;
$((p \Rightarrow q) . (p \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow (q \vee r)))$; $((p . q) \vee (p . r)) \Rightarrow (p . (q \vee r))$;
$(p . (q \vee r)) \Rightarrow ((p . q) \vee (p . r))$; $(p . (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p . q) \vee (p . r))$;
$(p \vee (q . r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) . (p \vee r))$; $(p \supset (q . r)) \Leftrightarrow ((p \supset q) . (p \supset r))$;
$((p \supset r) . (q \supset r)) \Rightarrow ((p \vee q) \supset r)$; $((p \vee q) \supset r) \Rightarrow ((p \supset r) . (q \supset r))$;
$((p \supset q) \vee (p \supset r)) \Rightarrow (p \supset (q \vee r))$; $((p \supset r) \vee (q \supset r)) \Rightarrow ((p . q) \supset r)$;
$((p \supset r) . (q \supset s)) \Rightarrow ((p . q) \Rightarrow (r . s))$; $((p \supset r) . (q \supset s)) \Rightarrow ((p \vee q) \supset (r \vee s))$

Tabell 12. Fler teorem som innehåller strikt implikation

Tabell 10 innehåller ett antal axiom (postulat) och grundläggande teorem som Lewis bevisar med hjälp av dessa. I våra system är alla satser i Tabell 10 teorem, inklusive Lewis axiom. Tabell 11 rymmer en mängd teorem som innehåller materiell implikation. Lewis tar bl.a. upp dessa för att belysa likheter och skillnader mellan materiell och strikt implikation.

I Tabell 13 nämns ett antal teorem som innehåller symboler som representerar konsistens och möjlighet, nämligen $\bigcirc$ respektive $\Diamond$. Lewis introducerar inga särskilda symboler för ”nödvändighet” och ”omöjlighet”, men påpekar att ”$\neg\Diamond\neg A$” kan läsas ”A är nödvändig” (”Det är nödvändigt att A”) och ”$\neg\Diamond A$” ”A är omöjlig” (”Det är omöjligt att A”).

---

$(p\bigcirc q)\Leftrightarrow\neg(p\Rightarrow\neg q)$; $(p\bigcirc q)\Leftrightarrow(\neg(p\Rightarrow\neg q).\neg(q\Rightarrow\neg p))$; $(p.q)\Rightarrow(p\bigcirc q)$;

$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow\neg(p\bigcirc\neg q)$; $\neg(p\bigcirc\neg p)$; $(p\bigcirc q)\Rightarrow(q\bigcirc p)$; $(p\bigcirc q)\Leftrightarrow(q\bigcirc p)$;

$((p\Rightarrow q).(p\bigcirc r))\Rightarrow(q\bigcirc r)$; $((p\Rightarrow q).\neg(q\bigcirc r))\Rightarrow\neg(p\bigcirc r)$;

$((p\Rightarrow r).(q\Rightarrow s).(p\bigcirc q))\Rightarrow(r\bigcirc s)$; $((p\Rightarrow r).(q\Rightarrow s).\neg(r\bigcirc s))\Rightarrow\neg(p\bigcirc q)$;

$((p.q)\bigcirc r)\Leftrightarrow((q.r)\bigcirc p)\Leftrightarrow((p.r)\bigcirc q)\Leftrightarrow(p\bigcirc(q.r))\Leftrightarrow(q\bigcirc(p.r))\Leftrightarrow(r\bigcirc(p.q))$;

$(\neg(p\bigcirc r).\neg(q\bigcirc\neg r))\Rightarrow\neg(p\bigcirc q)$; $((p\Rightarrow\neg r).(q\Rightarrow r))\Rightarrow\neg(p\bigcirc q)$;

$((p\Rightarrow q).(p\Rightarrow\neg q))\Rightarrow\neg(p\bigcirc p)$; $((p\Rightarrow q).(p\bigcirc p))\Rightarrow(q\bigcirc q)$;

$((p\Rightarrow q).\neg(q\bigcirc q))\Rightarrow\neg(p\bigcirc p)$; $((p\bigcirc p).\neg(q\bigcirc q))\Rightarrow\neg(p\Rightarrow q)$;

$((p\Rightarrow q).(p\bigcirc p))\Rightarrow(p\bigcirc q)$; $((p\Rightarrow q).\neg(p\bigcirc q))\Rightarrow\neg(p\bigcirc p)$;

$((p\bigcirc p).\neg(p\bigcirc q))\Rightarrow\neg(p\Rightarrow q)$; $((p\bigcirc p).(p\Rightarrow q))\Rightarrow\neg(p\Rightarrow\neg q)$;

$(p\bigcirc p)\Rightarrow\neg((p\Rightarrow q).(p\Rightarrow\neg q))$; $(p\bigcirc p)\Rightarrow((p\bigcirc q)\vee(p\bigcirc\neg q))$; $p\Rightarrow(p\bigcirc p)$;

$\neg(p\bigcirc p)\Rightarrow\neg p$; $(p\bigcirc(q\vee r))\Rightarrow((p\bigcirc q)\vee(p\bigcirc r))$;

$((p\bigcirc q)\vee(p\bigcirc r))\Rightarrow(p\bigcirc(q\vee r))$;

$\Diamond p\Leftrightarrow(p\bigcirc p)\Leftrightarrow\neg(p\Rightarrow\neg p)$; $\neg\Diamond p\Leftrightarrow\neg(p\bigcirc p)\Leftrightarrow(p\Rightarrow\neg p)$;

$\Diamond\neg p\Leftrightarrow(\neg p\bigcirc\neg p)\Leftrightarrow\neg(\neg p\Rightarrow p)$; $\neg\Diamond\neg p\Leftrightarrow\neg(\neg p\bigcirc\neg p)\Leftrightarrow(\neg p\Rightarrow p)$;

$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow((p.\neg q)\Rightarrow\neg(p.\neg q))\Leftrightarrow\neg((p.\neg q)\bigcirc(p.\neg q))$;

$\Diamond(p.q)\Leftrightarrow((p.q)\bigcirc(p.q))\Leftrightarrow(p\bigcirc q)\Leftrightarrow\neg(p\Rightarrow\neg q)$;

$\neg\Diamond(p.q)\Leftrightarrow\neg((p.q)\bigcirc(p.q))\Leftrightarrow\neg(p\bigcirc q)\Leftrightarrow(p\Rightarrow\neg q)$;

$\Diamond(p.q.r)\Leftrightarrow((p.q.r)\bigcirc(p.q.r))\Leftrightarrow((p.q)\bigcirc r)\Leftrightarrow((q.r)\bigcirc p)\Leftrightarrow((p.r)\bigcirc q)$ etc.

$\Leftrightarrow\neg((p.q)\Rightarrow\neg r)\Leftrightarrow\neg((q.r)\Rightarrow\neg p)\Leftrightarrow\neg((p.r)\Rightarrow\neg q)$;

$\Diamond(p.q.r.s\ldots)\Leftrightarrow(p\bigcirc(q.r.s\ldots))\Leftrightarrow(q\bigcirc(p.r.s\ldots))\Leftrightarrow((p.q)\bigcirc(r.s\ldots))$, etc. $\Leftrightarrow$

$\neg(q.r.s\ldots\Rightarrow\neg p)\Leftrightarrow\neg(p.r.s\ldots\Rightarrow\neg q)$, etc.

$p\Rightarrow\Diamond p$; $\neg\Diamond p\Rightarrow\neg p$; $\neg\Diamond\neg p\Rightarrow p$; $\neg\Diamond\neg p\Rightarrow\Diamond p$; $\neg p\Rightarrow\Diamond\neg p$; $\neg\Diamond p\Rightarrow\Diamond\neg p$;

$((p\Rightarrow q).\neg\Diamond q)\Rightarrow\neg\Diamond p$; $((p\Rightarrow q).\Diamond p)\Rightarrow\Diamond q$; $((p\Rightarrow q).\Diamond\neg q)\Rightarrow\Diamond\neg p$;

$((p\Rightarrow q).\neg\Diamond\neg p)\Rightarrow\neg\Diamond\neg q$; $(((p.q)\Rightarrow r).((p.\neg q)\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow r)$;

$(\neg\Diamond\neg p.((p.q)\Rightarrow r))\Rightarrow(q\Rightarrow r)$; $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow\neg\Diamond\neg(p\supset q)$; $\neg\Diamond(p.\neg p)$;

$\neg\Diamond\neg(p\vee\neg p)$; $p\Rightarrow((p.q)\vee(p.\neg q))$; $((p.q)\vee(p.\neg q))\Rightarrow p$;

$p\Leftrightarrow(p.(q\vee\neg q))\Leftrightarrow((p.q)\vee(p.\neg q))$

---

Tabell 13. Konsistens och de modala funktionerna

$\Diamond(p.q)\Rightarrow\Diamond p$; $\Diamond p\Rightarrow\Diamond(p\lor q)$; $\neg(p\bigcirc p)\Rightarrow\neg(p\bigcirc q)$; $(p\bigcirc q)\Rightarrow(p\bigcirc p)$;
$\Diamond(p.q)\Rightarrow\Diamond q$; $\Diamond(p.q)\Rightarrow(\Diamond p.\Diamond q)$; $\Diamond(p.q.r\ldots)\Rightarrow(\Diamond p.\Diamond q.\Diamond r\ldots)$;
$\neg\Diamond p\Rightarrow\neg\Diamond(p.q)$; $\neg\Diamond q\Rightarrow\neg\Diamond(p.q)$; $(\neg\Diamond p\lor\neg\Diamond q)\Rightarrow\neg\Diamond(p.q)$;
$(\neg\Diamond\neg p\lor\neg\Diamond\neg q)\Rightarrow\neg\Diamond\neg(p\lor q)$; $\Diamond\neg p\Rightarrow\Diamond\neg(p.q)$; $\Diamond\neg q\Rightarrow\Diamond\neg(p.q)$;
$(\Diamond\neg p\lor\Diamond\neg q)\Rightarrow\Diamond\neg(p.q)$; $\neg\Diamond\neg(p.q)\Rightarrow\neg\Diamond\neg p$; $\neg\Diamond\neg(p.q)\Rightarrow\neg\Diamond\neg q$;
$\neg\Diamond\neg(p.q)\Rightarrow(\neg\Diamond\neg p.\neg\Diamond\neg q)$; $\neg\Diamond(p\lor q)\Rightarrow\neg\Diamond p$; $\neg\Diamond(p\lor q)\Rightarrow\neg\Diamond q$;
$\neg\Diamond(p\lor q)\Rightarrow(\neg\Diamond p.\neg\Diamond q)$; $\Diamond p\Rightarrow\Diamond(p\lor q)$; $\Diamond q\Rightarrow\Diamond(p\lor q)$;
$(\Diamond p\lor\Diamond q)\Rightarrow\Diamond(p\lor q)$; $\neg\Diamond\neg p\Rightarrow\neg\Diamond\neg(p\lor q)$; $\neg\Diamond\neg q\Rightarrow\neg\Diamond\neg(p\lor q)$;
$(p\bigcirc(q.r))\Rightarrow(p\bigcirc q)$; $(p\bigcirc(q.r))\Rightarrow(p\bigcirc r)$; $(p\bigcirc(q.r))\Rightarrow(q\bigcirc r)$;
$(p\bigcirc(q.r))\Rightarrow((p\bigcirc q).(p\bigcirc r))$; $(p\bigcirc(q.r))\Rightarrow((p\bigcirc q).(p\bigcirc r).(q\bigcirc r))$;
$(p\bigcirc(q.r))\Rightarrow((p\bigcirc p).(q\bigcirc q).(r\bigcirc r).(p\bigcirc q).(p\bigcirc r).(q\bigcirc r))$;
$((p\Rightarrow q)\lor(p\Rightarrow r))\Rightarrow((p\Rightarrow(q\lor r))$; $((p\Rightarrow q)\lor(p\Rightarrow r)\lor(\neg q\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow(q\lor r))$;
$(p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow(q\lor r))$; $(p\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow(q\lor r))$; $((p\Rightarrow r)\lor(q\Rightarrow r))\Rightarrow((p.q)\Rightarrow r)$;
$(p\Rightarrow r)\Rightarrow((p.q)\Rightarrow r)$; $(q\Rightarrow r)\Rightarrow((p.q)\Rightarrow r)$; $(p.(q.\neg q))\Leftrightarrow(q.\neg q)$;
$p\Leftrightarrow(p\lor(q.\neg q))$;
$(p\Rightarrow q)\Rightarrow((p.r)\Rightarrow(q.r))$; $((p\Rightarrow q).(p\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow(q.r))$;
$(p\Rightarrow(q.r))\Rightarrow((p\Rightarrow q).(p\Rightarrow r))$; $(p\Rightarrow(q.r))\Leftrightarrow((p\Rightarrow q).(p\Rightarrow r))$;
$(p\Rightarrow q)\Rightarrow((p\lor r)\Rightarrow(q\lor r))$; $((p\Rightarrow r).(q\Rightarrow r))\Rightarrow((p\lor q)\Rightarrow r)$;
$((p\lor q)\Rightarrow r)\Rightarrow((p\Rightarrow r).(q\Rightarrow r))$; $((p\Rightarrow r).(q\Rightarrow r))\Leftrightarrow((p\lor q)\Rightarrow r)$;
$((p\Rightarrow r).(q\Rightarrow s))\Rightarrow((p.q)\Rightarrow(r.s))$; $((p\Rightarrow r).(q\Rightarrow s))\Rightarrow((p\lor q)\Rightarrow(r\lor s))$;
$((p\Rightarrow q).(p\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow(q\lor r))$; $(p\bigcirc(q\lor r))\Rightarrow((p\bigcirc q)\lor(p\bigcirc r))$;
$((p\bigcirc q)\lor(p\bigcirc r))\Rightarrow(p\bigcirc(q\lor r))$; $(p\bigcirc(q\lor r))\Leftrightarrow((p\bigcirc q)\lor(p\bigcirc r))$;
$(p\bigcirc p)\Leftrightarrow((p\bigcirc q)\lor(p\bigcirc\neg q))$;
$\Diamond p\Leftrightarrow((p\bigcirc q)\lor(p\bigcirc\neg q))\Leftrightarrow(\Diamond(p.q)\lor\Diamond(p.\neg q))$;
$\neg\Diamond p\Leftrightarrow(\neg(p\bigcirc q).\neg(p\bigcirc\neg q))\Leftrightarrow((p\Rightarrow\neg q).(p\Rightarrow q))$;
$\neg\Diamond\neg p\Leftrightarrow((q\Rightarrow p).(\neg q\Rightarrow p))$; $\neg\Diamond p\Rightarrow(p\Rightarrow q)$; $\neg\Diamond\neg p\Rightarrow(q\Rightarrow p)$;
$\neg(p\Rightarrow q)\Rightarrow\Diamond p$; $\neg(q\Rightarrow p)\Rightarrow\Diamond\neg p$; $(\neg\Diamond p.\neg\Diamond q)\Leftrightarrow\neg\Diamond(p\lor q)$;
$(\neg\Diamond\neg p.\neg\Diamond\neg q)\Leftrightarrow\neg\Diamond\neg(p.q)$; $(\Diamond p\lor\Diamond q)\Leftrightarrow\Diamond(p\lor q)$;
$(\neg\Diamond p.\neg\Diamond q)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$; $(\neg\Diamond\neg p.\neg\Diamond\neg q)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$; $\Diamond(p.q)\Rightarrow\Diamond p$;
$\Diamond p\Rightarrow\Diamond(p\lor q)$; $\neg(p\bigcirc p)\Rightarrow\neg(p\bigcirc q)$

Tabell 14. Konsistens postulat och teorem härledbara med detta

Än så länge innehåller alla teorem jag har tagit upp endast en typ av modala operatorer, nämligen aletiska. Aletisk-deontisk logik innehåller emellertid två olika typer av modala operatorer: aletiska och deontiska. Vi kan därför i aletisk-deontisk logik undersöka hur de olika typerna av operatorer förhåller sig till varandra. Vi kan t.ex. undersöka hur olika normativa satser är relaterade till olika satser som uttalar sig om konsistens, inkonsistens och strikt implikation. Jag kommer att koncentrera mig på två typer av aletisk-deontiska system, en typ som innehåller tablåregeln T-MO och en typ som innehåller tablåregeln T-OC (Rönnedal (2015b)). Jag kommer att nämna några olika teorem som är bevisbara i dessa system och jag kommer att gå igenom några bevis som exempel. Anledningen till att jag koncentrera mig på dessa typer av system är att T-MO och T-OC är två av de filosofiskt mest intressanta reglerna. I alla tablåsystem som innehåller T-OC kan vi bevisa en form av den s.k. bör-kan tesen, som påstår att något är obligatoriskt endast om det är möjligt. Och i alla system som innehåller T-MO kan vi bevisa en form av den s.k. mål-medel principen, som hävdar att alla nödvändiga konsekvenser av någonting som bör vara fallet bör vara fallet.

**(Meta)Teorem 4. (i)** Alla satser i Tabellerna 15–18 är teorem i alla aletisk-deontiska tablåsystem som innehåller T-MO. **(ii)** Alla satser i Tabellerna 19–20 är teorem i alla aletisk-deontiska tablåsystem som innehåller T-OC.

*Bevis*. Jag skall gå igenom några exempel och lämnar resten till läsaren.

| |
|---|
| $((A \wedge B) \ominus C) \supset ((OA \wedge OB) \supset FC)$ |
| $(OA \wedge OB) \supset (((A \wedge B) \ominus C) \supset FC)$ |
| $((OA \wedge OB) \wedge ((A \wedge B) \ominus C)) \supset FC$ |
| $(OA \wedge (A \ominus (B \vee C))) \supset (FB \wedge FC)$ |
| $OA \supset ((A \ominus (B \vee C)) \supset (FB \wedge FC))$ |
| $(A \ominus (B \vee C)) \supset (OA \supset (FB \wedge FC))$ |
| $(OC \wedge ((A \vee B) \ominus C)) \supset (FA \wedge FB)$ |
| $OC \supset (((A \vee B) \ominus C) \supset (FA \wedge FB))$ |
| $((A \vee B) \ominus C) \supset (OC \supset (FA \wedge FB))$ |
| $((A \Rightarrow B) \wedge (B \ominus C)) \supset F(A \wedge C)$ |
| $(((A \Rightarrow B) \wedge (B \ominus C)) \wedge OA) \supset FC$ |
| $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset (((C \ominus D) \wedge OA) \supset FB)$ |
| $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset (((C \ominus D) \wedge OB) \supset FA)$ |
| $(A \Rightarrow B) \supset (PA \supset (B \bigcirc B))$ |
| $(PA \wedge (A \Rightarrow B)) \supset (B \bigcirc B)$ |
| $(A \Rightarrow B) \supset ((B \ominus B) \supset FA)$ |
| $((B \ominus B) \wedge (A \Rightarrow B)) \supset FA$ |
| $(O(A \vee B) \wedge (B \ominus B)) \supset OA$ |
| $(O(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow \neg B)) \supset OA$ |
| $(OA \vee OB) \supset (((A \vee B) \Rightarrow C) \supset OC)$ |
| $(PA \vee PB) \supset (((A \vee B) \Rightarrow C) \supset PC)$ |

$FC\supset(((A\vee B)\Rightarrow C)\supset(FA\wedge FB))$
$PA\supset((A\Rightarrow(B\vee C))\supset(PB\vee PC))$
$(FB\wedge FC)\supset((A\Rightarrow(B\vee C))\supset FA)$
$(OA\wedge OB)\supset(((A\wedge B)\Rightarrow C)\supset OC)$
$OA\supset((A\Rightarrow(B\wedge C))\supset(OB\wedge OC))$
$PA\supset((A\Rightarrow (B\wedge C))\supset(PB\wedge PC))$
$(FB\vee FC)\supset((A\Rightarrow(B\wedge C))\supset FA)$
$(O(A\vee B)\wedge((A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow C)))\supset OC$
$(O(A\vee B)\wedge((A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow D)))\supset O(C\vee D)$
$(OA\wedge((A\Rightarrow B)\wedge(A\Rightarrow C)))\supset(OB\wedge OC)$
$(O(A\wedge B)\wedge((A\Rightarrow C)\vee(B\Rightarrow D)))\supset O(C\vee D)$
$(OA\wedge((A\Rightarrow B)\vee(A\Rightarrow C)))\supset O(B\vee C)$
$(O(A\wedge B)\wedge((A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow D)))\supset(OC\wedge OD)$
$(OA\wedge((A\ominus\neg B)\wedge(A\ominus\neg C)))\supset(OB\wedge OC)$
$(O(A\wedge B)\wedge((A\ominus\neg C)\wedge(B\ominus\neg D)))\supset(OC\wedge OD)$

Tabell 15. Teorem i TS-MO

| | |
|---|---|
| $P(A\wedge B)\supset(A\bigcirc B)$ | $(A\ominus B)\supset F(A\wedge B)$ |
| $((A\ominus B)\wedge OA)\supset FB$ | $((A\ominus B)\wedge OB)\supset FA$ |
| $(OA\wedge(A\ominus B))\supset FB$ | $(OB\wedge(A\ominus B))\supset FA$ |
| $OA\supset((A\ominus B)\supset FB)$ | $OB\supset((A\ominus B)\supset FA)$ |
| $(A\ominus B)\supset(OA\supset FB)$ | $(A\ominus B)\supset(OB\supset FA)$ |
| $(\Box A\wedge(A\ominus B))\supset FB$ | $(\Box B\wedge(A\ominus B))\supset FA$ |
| $\Box A\supset((A\ominus B)\supset FB)$ | $\Box B\supset((A\ominus B)\supset FA)$ |
| $(A\ominus B)\supset(\Box A\supset FB)$ | $(A\ominus B)\supset(\Box B\supset FA)$ |
| $((A\ominus B)\wedge\Box A)\supset FB$ | $((A\ominus B)\wedge\Box B)\supset FA$ |
| $(PA\wedge(A\ominus B))\supset\neg OB$ | $(PB\wedge(A\ominus B))\supset\neg OA$ |
| $PA\supset((A\ominus B)\supset\neg OB)$ | $PB\supset((A\ominus B)\supset\neg OA)$ |
| $(A\ominus B)\supset(PA\supset\neg OB)$ | $(A\ominus B)\supset(PB\supset\neg OA)$ |
| $(A\Rightarrow B)\supset(\Box A\supset OB)$ | $(A\ominus\neg B)\supset(\Box A\supset OB)$ |
| $(A\Rightarrow B)\supset(PA\supset\Diamond B)$ | $(A\ominus\neg B)\supset(PA\supset\Diamond B)$ |
| $(A\Rightarrow B)\supset(\diamondminus B\supset FA)$ | $(A\ominus\neg B)\supset(\diamondminus B\supset FA)$ |
| $(OA\wedge(A\Rightarrow B))\supset OB$ | $(OA\wedge(A\ominus\neg B))\supset OB$ |
| $(A\Rightarrow B)\supset(OA\supset OB)$ | $(A\ominus\neg B)\supset(OA\supset OB)$ |
| $OA\supset((A\Rightarrow B)\supset OB)$ | $OA\supset((A\ominus\neg B)\supset OB)$ |
| $(PA\wedge(A\Rightarrow B))\supset PB$ | $(PA\wedge(A\ominus\neg B))\supset PB$ |
| $(A\Rightarrow B)\supset(PA\supset PB)$ | $(A\ominus\neg B)\supset(PA\supset PB)$ |
| $PA\supset((A\Rightarrow B)\supset PB)$ | $PA\supset((A\ominus\neg B)\supset PB)$ |

| | |
|---|---|
| $(FB\wedge(A\Rightarrow B))\supset FA$ | $(FB\wedge(A\ominus\neg B))\supset FA$ |
| $(A\Rightarrow B)\supset(FB\supset FA)$ | $(A\ominus\neg B)\supset(FB\supset FA)$ |
| $FB\supset((A\Rightarrow B)\supset FA)$ | $FB\supset((A\ominus\neg B)\supset FA)$ |
| $(PA\wedge(A\Rightarrow B))\supset\Diamond B$ | $(PA\wedge(A\ominus\neg B))\supset\Diamond B$ |
| $(A\Rightarrow B)\supset(PA\supset\Diamond B)$ | $(A\ominus\neg B)\supset(PA\supset\Diamond B)$ |
| $PA\supset((A\Rightarrow B)\supset\Diamond B)$ | $PA\supset((A\ominus\neg B)\supset\Diamond B)$ |
| $(KA\wedge(A\Rightarrow B))\supset PB$ | $(KA\wedge(A\ominus\neg B))\supset PB$ |
| $(A\Rightarrow B)\supset(KA\supset PB)$ | $(A\ominus\neg B)\supset(KA\supset PB)$ |
| $KA\supset((A\Rightarrow B)\supset PB)$ | $KA\supset((A\ominus\neg B)\supset PB)$ |
| $(KA\wedge(A\Rightarrow B))\supset\Diamond B$ | $(KA\wedge(A\ominus\neg B))\supset\Diamond B$ |
| $(A\Rightarrow B)\supset(KA\supset\Diamond B)$ | $(A\ominus\neg B)\supset(KA\supset\Diamond B)$ |
| $KA\supset((A\Rightarrow B)\supset\Diamond B)$ | $KA\supset((A\ominus\neg B)\supset\Diamond B)$ |
| $(\neg OB\wedge(A\Rightarrow B))\supset\neg OA$ | $(\neg OB\wedge(A\ominus\neg B))\supset\neg OA$ |
| $(A\Rightarrow B)\supset(\neg OB\supset\neg OA)$ | $(A\ominus\neg B)\supset(\neg OB\supset\neg OA)$ |
| $\neg OB\supset((A\Rightarrow B)\supset\neg OA)$ | $\neg OB\supset((A\ominus\neg B)\supset\neg OA)$ |

Tabell 16. Teorem i TS-MO

Vi börjar med ett enkelt bevis av satsen $(A\ominus B)\supset F(A\wedge B)$, som säger att om A är inkonsistent med B, så är det förbjudet att A och B. Vi bevisar denna sats genom att skapa en sluten semantisk tablå för negationen av denna sats.

$(A\ominus B)\supset F(A\wedge B)$

(1) $\neg((A\ominus B)\supset F(A\wedge B))$, 0
(2) $A\ominus B$, 0 [1, $\neg\supset$]
(3) $\neg F(A\wedge B)$, 0 [1, $\neg\supset$]
(4) $P(A\wedge B)$, 0 [3, $\neg F$]
(5) 0s1 [4, P]
(6) $A\wedge B$, 1 [4, P]
(7) A, 1 [6, $\wedge$]
(8) B, 1 [6, $\wedge$]
(9) 0r1 [5, T-MO]
↙ ↘
(10) $\neg A$, 1 [2, 9, $\ominus$] (11) $\neg B$, 1 [2, 9, $\ominus$]
(12) * [7, 10] (13) * [8, 11]

Alla grenar i tablån ovan är stängda. Alltså är hela tablån stängd. I steg (9) har vi använt tablåregeln T-MO. Detta är den enda tillgänglighetsregel vi har nyttjat. Det följer att $(A\ominus B)\supset F(A\wedge B)$ är ett teorem i varje T-MO system. Eftersom system av detta slag är sunda med avseende på klassen av alla ramar i vilka den deontiska tillgänglighetsrelationen är inkluderad i den aletiska tillgänglighetsrelationen (Rönnedal (2015b)), följer det att $(A \ominus B) \supset F(A \wedge B)$ är giltig i klassen av alla ramar av detta slag.

$((A \ominus B) \wedge OA) \supset FB$

$\neg(((A \ominus B) \wedge OA) \supset FB), 0$
$(A \ominus B) \wedge OA, 0$
$\neg FB, 0$
$A \ominus B, 0$
$OA, 0$
$PB, 0$
$0s1$
$B, 1$
$A, 1$
$0r1$
↙ ↘

| | |
|---|---|
| $\neg A, 1$ | $\neg B, 1$ |
| * | * |

$((A \vee B) \ominus C) \supset (OC \supset (FA \wedge FB))$

$\neg(((A \vee B) \ominus C) \supset (OC \supset (FA \wedge FB))), 0$
$(A \vee B) \ominus C, 0$
$\neg(OC \supset (FA \wedge FB)), 0$
$OC, 0$
$\neg(FA \wedge FB), 0$
↙ ↘

| | |
|---|---|
| $\neg FA, 0$ | $\neg FB, 0$ |
| $PA, 0$ | $PB, 0$ |
| $0s1$ | $0s1$ |
| $A, 1$ | $B, 1$ |
| $C, 1$ | $C, 1$ |
| $0r1$ | $0r1$ |
| ↙ ↘ | ↙ ↘ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\neg(A \vee B), 1$ | $\neg C, 1$ | $\neg(A \vee B), 1$ | $\neg C, 1$ |
| $\neg A, 1$ | * | $\neg A, 1$ | * |
| $\neg B, 1$ | | $\neg B, 1$ | |
| * | | * | |

Ovanstående två semantiska tablåer bevisar att $((A \ominus B) \wedge OA) \supset FB$ och $((A \vee B) \ominus C) \supset (OC \supset (FA \wedge FB))$ är teorem i alla system som innehåller T-MO. Båda dessa satser är därför också giltiga i klassen av alla ramar som uppfyller det semantiska villkoret C-MO (se Rönnedal (2015b)). Enligt $((A \ominus B) \wedge OA) \supset FB$ så gäller det att om A är inkonsistent med B och det är obligatoriskt att A, så är det förbjudet att B. Det innebär att FB följer ur $(A \ominus B)$ och OA i alla T-MO system. Antag att det är obligatoriskt att alla betalar skatt och att propositionen att alla betalar skatt är oförenlig med propositionen att du inte betalar skatt. Då följer det att det är förbjudet att du inte betalar skatt. $((A \vee B) \ominus C) \supset (OC \supset (FA \wedge FB))$ säger att om A eller B är inkonsistent med C och det är obligatoriskt att C, så är det förbjudet att A och förbjudet att B.

Låt oss bevisa ytterligare ett par teorem.

$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset ((C \ominus D) \supset F(A \wedge B))$

$\neg(((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset ((C \ominus D) \supset F(A \wedge B)))$, 0
$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)$, 0
$\neg((C \ominus D) \supset F(A \wedge B))$, 0
$A \Rightarrow C$, 0
$B \Rightarrow D$, 0
$C \ominus D$, 0
$\neg F(A \wedge B)$, 0
$P(A \wedge B)$, 0
0s1
$A \wedge B$, 1
A, 1
B, 1
0r1
↙ ↘
$\neg A$, 1 C, 1
* ↙ ↘
$\neg B$, 1 D, 1
* ↙ ↘
$\neg C$, 1 $\neg D$, 1
* *

Ovanstående tablå är sluten. Alltså utgör den ett bevis för satsen $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset ((C \ominus D) \supset F(A \wedge B))$ i alla system som innehåller T-MO. ”$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset ((C \ominus D) \supset F(A \wedge B))$” läses ”Om A strikt implicerar C och B strikt implicerar D, så gäller det att om C är inkonsistent med D så är det förbjudet att A och B”.

$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset (((C \ominus D) \wedge OA) \supset FB)$

$$\neg(((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset (((C \ominus D) \wedge OA) \supset FB)), 0$$
$$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D), 0$$
$$\neg(((C \ominus D) \wedge OA) \supset FB), 0$$
$$(C \ominus D) \wedge OA, 0$$
$$\neg FB, 0$$
$$C \ominus D, 0$$
$$OA, 0$$
$$PB, 0$$
$$A \Rightarrow C, 0$$
$$B \Rightarrow D, 0$$
$$0s1$$
$$B, 1$$
$$A, 1$$
$$0r1$$
$$\swarrow \searrow$$
$$\neg A, 1 \qquad C, 1$$
$$* \qquad \swarrow \qquad \searrow$$
$$\neg B, 1 \qquad D, 1$$
$$* \qquad \swarrow \qquad \searrow$$
$$\neg C, 1 \qquad \neg D, 1$$
$$* \qquad *$$

Satsen ”$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset (((C \ominus D) \wedge OA) \supset FB)$” läses: ”Om A strikt implicerar C och B strikt implicerar D, så gäller det att om C är inkonsistent med D och det är obligatoriskt att A så är det förbjudet att B”.

| | |
|---|---|
| $(\diamondminus B \wedge (A \Rightarrow B)) \supset FA$ | $(\diamondminus B \wedge (A \ominus \neg B)) \supset FA$ |
| $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\diamondminus B \supset FA)$ | $(A \ominus \neg B) \Rightarrow (\diamondminus B \supset FA)$ |
| $\diamondminus B \supset ((A \Rightarrow B) \supset FA)$ | $\diamondminus B \supset ((A \ominus \neg B) \supset FA)$ |
| $(\diamondminus B \wedge (A \Rightarrow B)) \supset NA$ | $(\diamondminus B \wedge (A \Rightarrow B)) \supset NA$ |
| $(A \Rightarrow B) \supset (\diamondminus B \supset NA)$ | $(A \Rightarrow B) \supset (\diamondminus B \supset NA)$ |
| $\diamondminus B \supset ((A \Rightarrow B) \supset NA)$ | $\diamondminus B \supset ((A \Rightarrow B) \supset NA)$ |
| $(PA \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \bigcirc B)$ | $(PA \wedge (A \ominus \neg B)) \supset (B \bigcirc B)$ |

| | |
|---|---|
| $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (PA \supset (B \bigcirc B))$ | $(A \ominus \neg B) \supset (PA \supset (B \bigcirc B))$ |
| $PA \supset ((A \Rightarrow B) \supset (B \bigcirc B))$ | $PA \supset ((A \ominus \neg B) \supset (B \bigcirc B))$ |
| $((B \ominus B) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow FA$ | $((B \ominus B) \wedge (A \ominus \neg B)) \supset FA$ |
| $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \ominus B) \supset FA)$ | $(A \ominus \neg B) \supset ((B \ominus B) \supset FA)$ |
| $(B \ominus B) \supset ((A \Rightarrow B) \supset FA)$ | $(B \ominus B) \supset ((A \ominus \neg B) \supset FA)$ |

Tabell 17. Teorem i TS-MO

| |
|---|
| $(\neg A \Rightarrow A) \supset OA$ |
| $PA \supset (A \bigcirc A)$ |
| $(PA \wedge (A \Rightarrow B)) \supset (A \bigcirc B)$ |
| $P(A \wedge B) \ominus (A \Rightarrow \neg B)$ |
| $P(A \wedge B) \ominus (A \ominus B)$ |
| $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \supset FA$ |
| $(P(A \wedge B) \wedge (B \Rightarrow C)) \supset (A \bigcirc C)$ |
| $((OA \wedge PB) \wedge ((A \wedge B) \Rightarrow C)) \supset PC$ |
| $PA \supset ((A \Rightarrow (B \wedge C)) \supset (B \bigcirc C))$ |
| $(PA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (B \bigcirc C)$ |
| $PA \supset (((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \supset (B \bigcirc C))$ |
| $(PA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C))) \supset (A \bigcirc C)$ |
| $((A \ominus C) \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C))) \supset FA$ |
| $((B \ominus C) \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset FA$ |
| $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \supset ((B \ominus C) \supset FA)$ |
| $(PA \wedge ((A \ominus \neg B) \wedge (A \ominus \neg C))) \ominus (B \ominus C)$ |
| $(P(A \wedge B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (C \bigcirc D)$ |
| $P(A \wedge B) \supset (((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset (C \bigcirc D))$ |
| $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset (P(A \wedge B) \supset (C \bigcirc D))$ |
| $(P(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \ominus (C \ominus D)$ |
| $((C \ominus D) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset F(A \wedge B)$ |
| $(C \ominus D) \supset (((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset F(A \wedge B))$ |
| $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)) \supset ((C \ominus D) \supset F(A \wedge B))$ |

Tabell 18. Teorem i TS-MO

| | |
|---|---|
| $OA \Rightarrow \Diamond A$ | $\Diamond\!\!\!\!-\, A \Rightarrow \neg OA$ |
| $\neg(OA \bigcirc \Diamond\!\!\!\!-\, A)$ | $OA \ominus \Diamond\!\!\!\!-\, A$ |
| $OA \supset (A \bigcirc A)$ | $(A \ominus A) \supset \neg OA$ |
| $OA \supset \neg(A \Rightarrow \neg A)$ | $(A \Rightarrow \neg A) \supset \neg OA$ |
| $OA \Rightarrow (A \bigcirc A)$ | $(A \ominus A) \Rightarrow \neg OA$ |
| $OA \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg A)$ | $(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg OA$ |

| | |
|---|---|
| OA ⇒ PA | OA ⇒ ¬FA |
| ¬(OA ○ O¬A) | OA ⊖ O¬A |
| ¬(FA ○ F¬A) | FA ⊖ F¬A |
| ¬(□A ○ FA) | □A ⊖ FA |
| ¬(OA ○ (A ⊖ A)) | OA ⊖ (A ⊖ A) |
| ¬(O(A ∨ B) ○ (FA ∧ FB)) | O(A ∨ B) ⊖ (FA ∧ FB) |
| ¬(O(A ∨ B) ○ (⟠A ∧ ⟠B)) | O(A ∨ B) ⊖ (⟠A ∧ ⟠B) |
| (OA ∧ (A ⇒ B)) ⊃ (B ○ B) | ((B ⊖ B) ∧ (A ⇒ B)) ⊃ ¬OA |
| (A ⇒ B) ⊃ (OA ⊃ (B ○ B)) | (A ⇒ B) ⊃ ((B ⊖ B) ⊃ ¬OA) |
| OA ⊃ ((A ⇒ B) ⊃ (B ○ B)) | (B ⊖ B) ⊃ ((A ⇒ B) ⊃ ¬OA) |
| O(A ∧ B) ⊃ (A ○ B) | (A ⊖ B) ⊃ ¬O(A ∧ B) |
| ¬((A ⊖ B) ○ O(A ∧ B)) | (A ⊖ B) ⊖ O(A ∧ B) |
| (OA ∧ OB) ⊃ (A ○ B) | (FA ∧ FB) ⊃ (¬A ○ ¬B) |
| (A ⊖ B) ⊃ ¬(OA ∧ OB) | (¬A ⊖ ¬B) ⊃ ¬(FA ∧ FB) |
| (A ⊖ B) ⊖ (OA ∧ OB) | (¬A ⊖ ¬B) ⊖ (FA ∧ FB) |
| (A ⊖ B) ⊃ (P¬A ∨ P¬B) | (¬A ⊖ ¬B) ⊃ (PA ∨ PB) |
| (A ⊖ ¬B) ⊃ (OA ⊃ ◇B) | (A ⇒ B) ⊃ (OA ⊃ ◇B) |
| (OA ∧ (A ⊖ ¬B)) ⊃ ◇B | (OA ∧ (A ⇒ B)) ⊃ ◇B |
| OA ⊃ ((A ⊖ ¬B) ⊃ ◇B) | OA ⊃ ((A ⇒ B) ⊃ ◇B) |
| (A ⊖ ¬B) ⊃ (OA ⊃ PB) | (A ⇒ B) ⊃ (OA ⊃ PB) |
| (OA ∧ (A ⊖ ¬B)) ⊃ PB | (OA ∧ (A ⇒ B)) ⊃ PB |
| OA ⊃ ((A ⊖ ¬B) ⊃ PB) | OA ⊃ ((A ⇒ B) ⊃ PB) |
| (A ⊖ ¬B) ⊃ (□A ⊃ PB) | (A ⇒ B) ⊃ (□A ⊃ PB) |
| (□A ∧ (A ⊖ ¬B)) ⊃ PB | (□A ∧ (A ⇒ B)) ⊃ PB |
| □A ⊃ ((A ⊖ ¬B) ⊃ PB) | □A ⊃ ((A ⇒ B) ⊃ PB) |
| (A ⊖ ¬B) ⊃ (FB ⊃ ¬□A) | (A ⇒ B) ⊃ (FB ⊃ ¬□A) |
| (FB ∧ (A ⊖ ¬B)) ⊃ ¬□A | (FB ∧ (A ⇒ B)) ⊃ ¬□A |
| FB ⊃ ((A ⊖ ¬B) ⊃ ¬□A) | FB ⊃ ((A ⇒ B) ⊃ ¬□A) |
| (A ⊖ ¬B) ⊃ (⟠B ⊃ ¬OA) | (A ⇒ B) ⊃ (⟠B ⊃ ¬OA) |
| (⟠B ∧ (A ⊖ ¬B)) ⊃ ¬OA | (⟠B ∧ (A ⇒ B)) ⊃ ¬OA |
| ⟠B ⊃ ((A ⊖ ¬B) ⊃ ¬OA) | ⟠B ⊃ ((A ⇒ B) ⊃ ¬OA) |

Tabell 19. Teorem i TS-OC

| |
|---|
| (A ⇒ B) ⊃ (FB ⊃ ¬OA) |
| (FB ∧ (A ⇒ B)) ⊃ ¬OA |
| ¬(O(A ∨ B) ∧ ((A ⊖ A) ∧ (B ⊖ B))) |
| ¬(O(A ∧ B) ∧ (A ⊖ B)) |
| ¬(O(A ∧ B) ∧ (A ⇒ ¬B)) |

$$(OA \wedge (A \Rightarrow (B \wedge C))) \supset (B \bigcirc C)$$
$$(O(A \wedge B) \wedge (B \Rightarrow C)) \supset (B \bigcirc C)$$
$$(A \Rightarrow (B \wedge C)) \supset (OA \supset (B \bigcirc C))$$
$$OA \supset ((A \Rightarrow (B \wedge C)) \supset (B \bigcirc C))$$
$$(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (B \bigcirc C)$$
$$(FC \wedge ((A \supset B) \Rightarrow C)) \supset (A \bigcirc \neg B)$$
$$OA \supset ((A \ominus \neg(B \wedge C)) \supset (B \bigcirc C))$$
$$(OA \wedge ((A \ominus \neg B) \wedge (A \ominus \neg C))) \supset (B \bigcirc C)$$
$$(O(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (C \bigcirc D)$$
$$((OA \vee OB) \wedge ((A \vee B) \Rightarrow C)) \supset PC$$
$$(FC \wedge ((A \vee B) \Rightarrow C)) \supset (\neg OA \wedge \neg OB))$$
$$(OA \wedge (A \Rightarrow (B \vee C))) \supset (PB \vee PC))$$
$$((FB \wedge FC) \wedge (A \Rightarrow (B \vee C))) \supset \neg OA$$
$$((OA \wedge OB) \wedge ((A \wedge B) \Rightarrow C)) \supset PC$$
$$(FC \wedge ((A \wedge B) \Rightarrow C)) \supset (\neg OA \vee \neg OB)$$
$$(FC \wedge ((A \wedge B) \Rightarrow C)) \supset (P\neg A \vee P\neg B))$$
$$(OA \wedge (A \Rightarrow (B \wedge C))) \supset (PB \wedge PC))$$
$$((FB \vee FC) \wedge (A \Rightarrow (B \wedge C))) \supset \neg OA$$
$$((\neg PB \vee \neg PC) \wedge (A \Rightarrow (B \wedge C))) \supset \neg OA$$
$$(O(A \vee B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))) \supset PC$$
$$(O(A \vee B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (PC \vee PD)$$
$$(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (PB \wedge PC)$$
$$(O(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow D))) \supset (PC \vee PD)$$
$$(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C))) \supset (PB \vee PC)$$
$$(O(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (PC \wedge PD)$$
$$(O(A \vee B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))) \supset \Diamond C$$
$$(O(A \vee B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (\Diamond C \vee \Diamond D)$$
$$(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (\Diamond B \wedge \Diamond C)$$
$$(O(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow D))) \supset (\Diamond C \vee \Diamond D)$$
$$(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C))) \supset (\Diamond B \vee \Diamond C)$$
$$(O(A \wedge B) \wedge ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D))) \supset (\Diamond C \wedge \Diamond D)$$

Tabell 20. Teorem i TS-OC

Vi har ovan gått igenom några exempel på bevis i system som innehåller regeln T-MO. Jag skall nu ta upp några exempel på bevis av några satser i aletisk-deontiska system som innehåller tablåregeln T-OC. Låt oss börja med ett relativ enkelt bevis av satsen $(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$. Enligt $(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$ så gäller det att om det är obligatoriskt att A och det är obligatoriskt att

B, så är A konsistent med B (så är A och B konsistenta/förenliga). Enligt ”kontrapositionen” till detta teorem så gäller det att om A och B inte är förenliga, så är det inte både obligatoriskt att A och obligatoriskt att B.

$(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$

(1) $\neg((OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)), 0$
(2) $OA \wedge OB, 0$ [1, $\neg\supset$]
(3) $\neg(A \bigcirc B), 0$ [1, $\neg\supset$]
(4) $OA, 0$ [2, $\wedge$]
(5) $OB, 0$ [2, $\wedge$]
(6) $A \ominus B, 0$ [3, $\neg\bigcirc$]
(7) 0s1 [T-OC]
(8) 0r1 [T-OC]
(9) A, 1 [4, 7, O]
(10) B, 1 [5, 7, O]
↙ ↘
(11) $\neg A$, 1 [6, 8, $\ominus$] | (12) $\neg B$, 1 [6, 8, $\ominus$]
(13) * [9, 11] | (14) * [10, 12]

Ovanstående tablå är sluten. Alltså utgör den ett bevis för $(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$ i alla system som innehåller T-OC. Eftersom alla T-OC system är giltiga i klassen av alla ramar där varje möjlig värld kan se åtminstone någon möjlig värld både aletiskt och deontiskt, är denna sats giltig i klassen av alla världar som uppfyller detta villkor.

Principen $(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$ utesluter förekomsten av genuina moraliska dilemman. Ett moraliskt dilemma är en situation där det är obligatoriskt att A och det är obligatoriskt att B samtidigt som A och B är oförenliga. Här följer ett exempel. Antag att du har lovat din vän att hjälpa henne att flytta. Då bör du hjälpa henne att flytta. Antag vidare att din dotter blir svårt sjuk samma dag som du har lovat din vän att flytta. Då bör du köra din dotter till sjukhuset. Men du hinner inte både hjälpa din vän och köra din dotter till sjukhuset. Propositionen att du hjälper din vän är oförenlig med propositionen att du kör din dotter till sjukhuset. Låt p stå för ”Du hjälper din vän att flytta” och q för ”Du kör din dotter till sjukhuset”. Då tycks följande satser vara sanna i vårt exempel: Op, Oq, $\neg(p \bigcirc q)$. Men om alla dessa satser är sanna, så kan inte $(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$ vara giltig. $(OA \wedge OB) \supset (A \bigcirc B)$ utesluter därför moraliska dilemman av detta slag. Om det verkligen är omöjligt både att hjälpa din vän flytta och köra din dotter till sjukhuset, så är det inte både obligatoriskt att hjälpa din vän flytta och obligatoriskt att köra din dotter till sjukhuset. Det tycks bara som om alla satserna Op, Oq, $\neg(p \bigcirc q)$ är sanna. I vårt fall förefaller det t.ex. vara så att du har en prima facie plikt att hjälpa din vän flytta och att du har en prima facie plikt att köra din dotter till sjukhuset, men att plikten att köra din dotter till sjukhuset väger tyngre än plikten att hjälpa din vän att flytta. Därför har du ingen allt taget i beaktande plikt att hjälpa din vän att flytta. Däremot bör du om möjligt meddela henne att du har fått förhinder och kanske bör du försöka gottgöra henne i efterhand. (För mer information om moraliska dilemman, se t.ex. Rönnedal (2012b).)

Låt oss gå igenom ytterligare ett par exempel på teorem.

$(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (B \bigcirc C)$

$$
\begin{array}{c}
(1)\ \neg((OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (B \bigcirc C)),\ 0 \\
(2)\ OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)),\ 0\ [1, \neg\supset] \\
(3)\ \neg(B \bigcirc C),\ 0\ [1, \neg\supset] \\
(4)\ OA,\ 0\ [2, \wedge] \\
(5)\ (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C),\ 0\ [2, \wedge] \\
(6)\ A \Rightarrow B,\ 0\ [5, \wedge] \\
(7)\ A \Rightarrow C,\ 0\ [5, \wedge] \\
(8)\ B \ominus C,\ 0\ [3, \neg\bigcirc] \\
(9)\ 0s1\ [\text{T-OC}] \\
(10)\ 0r1\ [\text{T-OC}] \\
(11)\ A,\ 1\ [4, 9, O] \\
(12)\ A \supset B,\ 1\ [6, 10, \Rightarrow'] \\
(13)\ A \supset C,\ 1\ [7, 10, \Rightarrow'] \\
(14)\ B,\ 1\ [11, 12, MP] \\
(15)\ C,\ 1\ [11, 13, MP] \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
(16)\ \neg B,\ 1\ [8, 10, \ominus] & (17)\ \neg C,\ 1\ [8, 10, \ominus] \\
(18)\ *\ [14, 16] & (19)\ *\ [15, 17]
\end{array}
\end{array}
$$

Ovanstående semantiska tablå är sluten. Alltså utgör den ett bevis för satsen $(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (B \bigcirc C)$ i varje tablåsystem som innehåller regeln T-OC. ”$(OA \wedge ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))) \supset (B \bigcirc C)$” läses ”Om det är obligatoriskt att A och A strikt implicerar B och A strikt implicerar C, så är B och C konsistenta”. Från detta följer det att om B och C inte är konsistenta och A implicerar (medför) både B och C, så är det inte obligatoriskt att A. Så, i någon mening kan man säga att även denna sats utesluter en viss form av moraliska dilemman. Vi skall avsluta med att bevisa ytterligare en sats som är ett teorem i varje T-OC system, nämligen $(O(A\wedge B)\wedge((A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow D)))\supset(C\bigcirc D)$. Enligt denna formel gäller det att om det är obligatoriskt att A och B och A implicerar C och B implicerar D, så är C konsistent med D. Omvänt gäller det att om C och D inte är förenliga och A implicerar C och B implicerar D, så är det inte fallet att det är obligatoriskt att A och B.

$(O(A\wedge B)\wedge((A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow D)))\supset(C\bigcirc D)$

$$\neg((O(A\wedge B)\wedge((A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow D)))\supset(C\bigcirc D)),\ 0$$
$$O(A\wedge B),\ 0$$
$$(A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow D),\ 0$$
$$\neg(C\bigcirc D),\ 0$$
$$A\Rightarrow C,\ 0$$
$$B\Rightarrow D,\ 0$$
$$C\ominus D,\ 0$$
$$0s1$$
$$0r1$$
$$A\wedge B,\ 1$$
$$A,\ 1$$
$$B,\ 1$$
$$A\supset C,\ 1$$
$$B\supset D,\ 1$$
$$C,\ 1$$
$$D,\ 1$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$\neg C,\ 1 \qquad\qquad \neg D,\ 1$$
$$* \qquad\qquad\qquad *$$

Med hjälp av dessa exempel borde det vara relativt enkelt för läsaren att bevisa övriga teorem på egen hand.

**Referenser**

Anderson, A. R. (1956). The formal analysis of normative systems. I N. Rescher (red.). *The Logic of Decision and Action*. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press, 1967, ss. 147–213.

Anderson, A. R. (1958). A reduction of deontic logic to alethic modal logic. *Mind*, Vol. 67, Nr. 265, ss. 100–103.

Anderson, A. R. (1959). On the logic of commitment. *Philosophical Studies* 10, ss. 23–27.

Anderson, A. R. (1967). Some Nasty Problems in the Formal Logic of Ethics. *Noûs*, Vol. 1, Nr. 4, ss. 345–360.

Beth, E. W. (1955). Semantic Entailment and Formal Derivability. *Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Afdeling Letterkunde, N.S., Vol. 18, nr. 13, Amsterdam, ss. 309–342. Publicerad på nytt i Hintikka (1969), ss. 9–41.

Beth, E. W. (1959). *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam.

Blackburn, P., de Rijke, M. & Venema, Y. (2001). *Modal Logic*. Cambridge University Press.

Blackburn, P., van Benthem, J. & Wolter, F. (red.). (2007). *Handbook of Modal Logic*. Elsevier.

Chellas, B. F. (1980). *Modal Logic: An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.

D'Agostino, M., Gabbay, D., Hähnle, R., & Posegga, J. (red.) (1999) *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fitting, M. & Mendelsohn, R. L. (1998). *First-Order Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers.

Gabbay, D. M. (1976). *Investigations in Modal and Tense Logics with Applications to Problems in Philosophy and Linguistics*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gabbay, D. M. & Guenthner, F. (red.). (2001). *Handbook of Philosophical Logic 2nd Edition*, Vol. 3, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gabbay, D., Horty, J., Parent, X., van der Meyden, E. & van der Torre, L. (red.). (2013). *Handbook of Deontic Logic and Normative Systems*. College Publications.

Gabbay, D. M., Kurucz, A., Wolter, F. & Zakharyaschev, M. (2003). *Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications*. Amsterdam: Elsevier.

Garson, J. W. (2006). *Modal Logic for Philosophers*. New York: Cambridge University Press.

Gentzen, G. (1935). Untersuchungen über das Logische Shliessen I. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 176–210. Engelsk översättning "Investigations into Logical Deduction", i Szabo (1969).

Gentzen, G. (1935b). Untersuchungen über das Logische Shliessen II. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 405–431. Engelsk översättning ”Investigations into Logical Deduction”, i Szabo (1969).

Girle, R. (2000). *Modal Logics and Philosophy*. McGill-Queen’s University Press.

Hilpinen, R. (red.). (1971). *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Hilpinen, R. (red.). (1981). *New Studies in Deontic Logic Norms, Actions, and the Foundation of Ethics*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Hintikka, J. (1969). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford Readings in Philosophy, Oxford University Press.

Jeffrey, R. C. (1967). *Formal Logic: Its Scope and Limits*. New York: McGraw-Hill.

Kracht, M. (1999). *Tools and Techniques in Modal Logic*. Amsterdam: Elsevier.

Lewis, C. I. (1918). *A Survey of Symbolic Logic*. Berkeley: University of California Press.

Lewis, C. I. & Langford, C. H. (1932). *Symbolic Logic*. New York: Dover Publications. Second edition 1959.

Popkorn, S. (1994). *First Steps in Modal Logic*. Cambridge University Press.

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Rescher, N. (red.). (1967). *The Logic of Decision and Action*. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press.

Rönnedal, D. (2009). Dyadic Deontic Logic and Semantic Tableaux. *Logic and Logical Philosophy*, Vol. 18, Nr. 3–4, ss. 221–252.

Rönnedal, D. (2010). *An Introduction to Deontic Logic*. Charleston, SC.

Rönnedal, D. (2012). Bimodal Logic. *Polish Journal of Philosophy*. Vol. VI, Nr. 2, ss. 71–93.

Rönnedal, D. (2012b). *Extensions of Deontic Logic: An Investigation into some Multi-Modal Systems*. Department of Philosophy, Stockholm University.

Rönnedal, D. (2015). Alethic-Deontic Logic: Some Theorems. *Filosofiska Notiser*, Årgång 2, Nr. 1, ss. 61–77.

Rönnedal, D. (2015b). Alethic-Deontic Logic: Deontic Accessibility Defined in Terms of Alethic Accessibility. *Filosofiska Notiser*, Årgång 2, Nr. 3, ss. 27–68.

Rönnedal, D. (2015c). Alethic-Deontic Logic and the Alethic-Deontic Octagon. *Filosofiska Notiser*, Årgång 2, Nr. 3, ss. 27–68.

Segerberg, K. (1971). *An Essay in Classical Modal Logic*. 3 Vol. Uppsala: University of Uppsala.
Smullyan, R. M. (1968). *First-Order Logic*. Heidelberg: Springer-Verlag.
Szabo, M. E. (red.) (1969). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland, Amsterdam.
Zeman, J. J. (1973). *Modal Logic: The Lewis-Modal Systems*. Oxford: Clarendon Press.
Åqvist, L. (1987). *Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems*. Naples: Bibliopolis.
Åqvist, L. (2002). Deontic Logic. In Gabbay & Guenthner (red.). *Handbook of Philosophical Logic 2nd Edition*. Vol. 8, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, ss. 147–264.

Daniel Rönnedal
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
daniel.ronnedal@philosophy.su.se