Satslogiken, Sanningsfunktioner och Semantiska Tablåer

Daniel Rönnedal

Abstrakt

Den här uppsatsen handlar om satslogiken, sanningsfunktioner och semantiska tablåer. Syftet är dels att sammanfatta några intressanta fakta om satslogiken, dels att presentera viss ny information om denna välutvecklade gren av logiken. En sanningsfunktion är en funktion som tar oss från sanningsvärden till sanningsvärden (Det Sanna, Det Falska). Det finns 1-ställiga sanningsfunktioner som tar ett sanningsvärde som input och ger ett sanningsvärde som output; det finns 2-ställiga sanningsfunktioner som tar två sanningsvärden som input och ger ett sanningsvärde som output osv. Satslogiken är den gren av logiken som handlar om sanningsfunktioner. I den här uppsatsen undersöker jag alla 1- och 2-ställiga sanningsfunktioner. Jag utvecklar semantiska tablåsystem som innehåller konnektiv som uttrycker dessa sanningsfunktioner och introducerar en mängd tablåregler som kan användas i olika tablåbevis. Jag definierar att antal grundläggande begrepp, visar hur satslogiken kan simuleras i predikatlogik, går igenom en mängd användbara regler, och nämner flera intressanta teorem och metateorem.

1. Introduktion

Den här uppsatsen handlar om satslogiken, sanningsfunktioner och semantiska tablåer. Syftet är dels att sammanfatta några intressanta fakta om denna välutvecklade gren av logiken, dels att presentera viss ny information. Satslogiken är en av de äldsta typerna av logik och de logiska egenskaperna hos uttryck som ”inte”, ”och”, ”eller”, ”om, så” osv. har studerats sedan antiken (Łukasiewicz (1935)). Tanken att konstruktioner av detta slag uttrycker sanningsfunktioner är emellertid relativt ny och tycks ha sitt ursprung i Gottlob Freges verk (se uppsatserna i Frege (1995)).

Satslogiken kan studeras ur en mängd olika perspektiv och med hjälp av olika bevismetoder (Bostock (1997), Sundholm (2001)). Axiomatiska framställningar av satslogiken finner man bl.a. i Frege (1879), Whitehead &

Filosofiska Notiser, Årgång 3, Nr. 1, April 2016, 51–98

Russell (1910), Church (1956), Bostock (1997), Kap. 5, Epstein (2006), Kap. II, Kleene (1952), Mendelson (1964). Se också Quine (1950), Kap. 13.

Så kallade sanningstabeller kan t.ex. användas för att avgöra om en sats är logisk sann eller inte, om en sats är logiskt falsk eller inte, om en sats är logiskt kontingent eller inte, om två satser är logiskt ekvivalenta eller inte, om ett argument är giltigt eller inte, om en mängd satser är satisfierbar eller inte, m.m. Andra metoder, såsom den semantiska tablåmetoden, kan också användas för dessa ändamål (se Avsnitt 4.5). För mer information om sanningstabeller, se nästan vilken introduktion till logik som helst, t.ex. Bonevac (2003), Copi & Cohen (2002), Layman (2002), Lepore (2000), Mårtensson (1993), Prawitz (1991). Metoden utvecklades på 1920-talet av bl.a. Łukasiewicz och Post. Se också Wittgenstein (1921). Enligt Quine (1950), s. 38 var den grundläggande idén bakom sanningstabeller känd redan på 1880-talet av Frege, Peirce och Schröder.

Satslogiken kan även studeras med hjälp av s.k. sekvenssystem, se t.ex. Gentzen (1935a), (1935b), Bostock (1997), Kap. 7, och Buss (1998b).

En annan typ av bevisteori är s.k. naturlig deduktion. Introduktioner till satslogik och naturlig deduktion hittar man bl.a. i Anderson & Johnstone (1962), Bonevac (2003), Copi & Cohen (2002), Mårtensson (1993), Prawitz (1991), Thomason (1970).

En av de yngsta bevismetoderna använder s.k. semantiska tablåer. I den här uppsatsen koncentrerar jag mig på semantiska tablåsystem. För mer information om satslogik och semantiska tablåer, se t.ex. Bonevac (2003), Jeffrey (1967), Lepore (2000), Smullyan (1968). Se också referenserna i Avsnitt 4.2.

Oavsett vilken typ av bevisteori vi använder, kan satslogiken sägas vara den gren av logiken som handlar om sanningsfunktioner. En sanningsfunktion är en funktion som tar oss från sanningsvärden till sanningsvärden (Det Sanna, Det Falska). Det finns 1-ställiga sanningsfunktioner som tar ett sanningsvärde som input och ger ett sanningsvärde som output; det finns 2-ställiga sanningsfunktioner som tar två sanningsvärden som input och ger ett sanningsvärde som output osv. I den här uppsatsen undersöker jag alla 1- och 2-ställiga sanningsfunktioner. Jag utvecklar semantiska tablåsystem som innehåller konnektiv som uttrycker dessa sanningsfunktioner och introducerar en mängd tablåregler som kan användas i olika tablåbevis. Jag definierar ett antal grundläggande begrepp, visar hur satslogiken kan simuleras i predikatlogik, går igenom en mängd användbara regler, och nämner flera intressanta teorem och metateorem.

Uppsatsen är indelade i sex avsnitt. Avsnitt 2 handlar om syntax och Avsnitt 3 om semantik. I Avsnitt 4, som sysslar med bevisteori, presenterar jag ett stort antal tablåregler och visar hur dessa kan användas för att skapa en mängd tablåsystem. Avsnitt 5 innehåller en lista på några välkända satslogiska sanningar, och i Avsnitt 6 går jag igenom en mängd intressanta metateorem.

2. Syntax

Det är möjligt att konstruera en stor mängd olika satslogiska språk, som bildar en enorm lattice. I den här sektionen skall jag säga lite mer om detta.

2.1. Alfabet

Satsbokstäver: p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2, …
(Satslogiska) konstanter (0-ställiga konnektiv): $\top_0$ (Verum), och $\underline{\top}_0$ (Falsum).
(Satslogiska) monadiska (1-ställiga) konnektiv (symboler eller operatorer): **S** (Det är sant att), **F** (Det är falskt att), $\neg$ (negation), $\top_1$ (Verum), och $\underline{\top}_1$ (Falsum).
(Satslogiska) binära (dyadiska, 2-ställiga) konnektiv (symboler eller operatorer): $\wedge$ (konjunktion), $\vee$ (disjunktion), $\rightarrow$ ((materiell) implikation), $\leftrightarrow$ ((materiell) ekvivalens), $\underline{\vartriangle}$ (negerad konjunktion, NAND), $\underline{\vee}$ (negerad disjunktion, NOR), $\underline{\rightarrow}$ (negerad (materiell) implikation), $\underline{\leftrightarrow}$ (negerad (materiell) ekvivalens, exklusiv disjunktion, XOR), $\leftarrow$ (omvänd (materiell) implikation), $\underline{\leftarrow}$ (negerad omvänd (materiell) implikation), $<$ (höger redundans), $>$ (vänster redundans), $\leq$ (negerad höger redundans), $\geq$ (negerad vänster redundans), $\top_2$ (Verum), och $\underline{\top}_2$ (Falsum).
Parenteser) och (.

0-an i $\top_0$ och $\underline{\top}_0$ anger att $\top_0$ och $\underline{\top}_0$ är konstanter, 1-an i $\top_1$ och $\underline{\top}_1$ att $\top_1$ och $\underline{\top}_1$ är monadiska konnektiv, och 2-an i $\top_2$ och $\underline{\top}_2$ att $\top_2$ och $\underline{\top}_2$ är binära konnektiv. Jag skall ofta utelämna denna siffra, då det inte ger upphov till någon mångtydighet. Satser som byggs upp med hjälp av Verum eller Falsum (som huvudkonnektiv) har alltid samma värdering (se Avsnitt 3.2.1).

2.2. Satser

Med hjälp av de symboler som introducerades ovan i Avsnitt 2.1 är det möjligt att konstruera en mängd olika satslogiska språk. Olika satslogiska språk kan innehålla olika primitiva tecken. Alla satslogiska språk innehåller alla satsbokstäver, höger och vänster parentes och någon delmängd (möjligtvis tom) av de övriga symbolerna i Avsnitt 2.1. Dessa symboler är primitiva. Låt ©$_1$ vara ett monadiskt konnektiv och låt ©$_2$ vara ett binärt konnektiv. Ett satslogiskt språk L{X} är ett satslogiskt språk som består av alla satser (välformade formler) som genereras från följande villkor med hjälp av symbolerna i {X}:

Varje satsbokstav är en (atomär) sats i L{X}.
Om $\top_0$ och $\bot_0$ ingår i {X}, så är $\top_0$ och $\bot_0$ (atomära) satser i L{X}.
Om ©$_1$ är ett element i {X} och A är en sats i L{X}, så är ©$_1$A en sats i L{X}.
Om ©$_2$ är ett element i {X} och A och B är satser i L{X}, så är (A ©$_2$ B) en sats i L{X}.
Ingenting annat är en sats i L{X}.
Satser som inte är atomära kallas ”komplexa” eller ”sammansatta”.

©$_1$ är alltså ett slags satsoperatorer som syntaktiskt tar en sats som argument och ger en sats som värde, och ©$_2$ ett slags satsoperatorer som syntaktiskt tar två satser som argument och ger en sats som värde. De satslogiska konnektiven antas representera eller uttrycka olika sanningsfunktioner (se Avsnitt 3). Det finns 1-ställiga, 2-ställiga, 3-ställiga, 4-ställiga… osv. sanningsfunktioner. Vi skulle i princip kunna addera satslogiska konnektiv som motsvarar alla dessa funktioner till vårt satslogiska språk. Vi skall emellertid koncentrera oss på konstanter, monadiska och binära konnektiv i den här uppsatsen.

Det minsta språket L{} består endast av satsbokstäverna och parenteserna. Extensioner av detta språk innehåller alla satsbokstäverna, plus alla satser som kan genereras med hjälp en eller flera satslogiska konnektiv i enlighet med reglerna ovan. ”L{$\wedge$}”, står t.ex. för det språk som endast innehåller det satslogiska konnektivet $\wedge$, ”L{$\neg$, $\vee$}” för det språk som innehåller $\neg$ och $\vee$ osv. p, q och $(p \wedge q)$ är t.ex. satser i L{$\wedge$}, men det är inte $(p \vee q)$. p, q, $\neg(p \vee q)$ är satser i L{$\neg$, $\vee$}, medan $(p \wedge q)$ inte är en välformad formel i L{$\neg$, $\vee$}. Osv.

Allmänt gäller det att en mängd med n element har 2^n (2 upphöjt till n) delmängder. Så, om vi antar att det finns ett konnektiv för varje sanningsfunktion, så finns det 2 ^ 2 = 4 språk som endast innehåller satsbokstäver eller konstanter, 2 ^ 6 = 64 språk som endast innehåller satsbokstäver, konstanter eller monadiska konnektiv, och 2 ^ 22 = 4194304 språk som endast innehåller satsbokstäver, konstanter, monadiska eller binära konnektiv. För det finns 4 monadiska sanningsfunktioner och 16 binära sanningsfunktioner (se Avsnitt 3). Ett satslogiskt språk är satslogiskt fullständigt om och endast om (omm) det kan uttrycka alla sanningsfunktioner (se Avsnitt 3.5). Inte alla satslogiska språk är fullständiga. Det är de fullständiga språken som är filosofiskt intressantast. Många olika språk är fullständiga. I fullständiga språk kan icke-primitiva termer som motsvarar alla sanningsfunktioner definieras i termer av de primitiva konnektiven.

Låt en n-mängd vara en mängd med n element och en r-delmängd av en mängd vara en delmängd av denna mängd med r element. Då denoteras antalet r-delmängder av en n-mängd med följande symbol (n över r):

$$\binom{n}{r}.$$

"n!" står för n-fakultet; n! erhålls genom att multiplicera alla naturliga tal från 1 till n, dvs. $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$. Till exempel, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. Vi stipulerar att $0! = 1$. Mer precist, vi kan använda följande rekursiva definition: $0! = 1! = 1$, $(n + 1)! = (n + 1) \times n!$ $(n \geq 1)$. Låt n och r vara positiva heltal som uppfyller villkoren $1 \leq r \leq n$. Då kan vi räkna ut n över r på följande sätt (Biggs (2002), s. 107):

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Med hjälp av denna formel kan vi ta reda på hur många olika språk med ett visst antal primitiva termer det finns. Det finns t.ex. 5 över 22 = 26334 språk som sammanlagt innehåller 5 primitiva satslogiska symboler (satslogiska konstanter, monadiska och/eller binära konnektiv).

2.3. Definitioner

I vissa språk som inte innehåller alla monadiska och binära symboler kan vi införa dessa med hjälp av definitioner. Om vårt satslogiska språk är fullständigt, kan vi i princip definiera nya satslogiska konnektiv som motsvarar varje sanningsfunktion. I språk som inte är satslogiskt fullständiga är detta inte alltid möjligt. De satslogiska språken "L{$\triangle$}", "L{$\underline{\vee}$}". "L{$\neg$, $\wedge$}", "L{$\neg$, $\vee$}" är t.ex. satslogiskt fullständiga (de är inte de enda). Jag skall nu visa hur övriga monadiska och binära konnektiv kan definieras i dessa språk.

Negerad konjunktion (inte både och) som enda primitiv operator

$\mathsf{T} \quad =_{df} \quad (A \triangle A) \triangle A$

$\underline{\mathsf{T}} \quad =_{df} \quad (A \triangle (A \triangle A)) \triangle (A \triangle (A \triangle A))$

$\mathbf{S}A$	$=_{df}$	$(A\vartriangle A)\vartriangle(A\vartriangle A)$ (eller A)
$\mathbf{F}A$	$=_{df}$	$(A\vartriangle A)$
$\neg A$	$=_{df}$	$(A\vartriangle A)$
$A\vee B$	$=_{df}$	$(A\vartriangle A)\vartriangle(B\vartriangle B)$
$A\wedge B$	$=_{df}$	$(A\vartriangle B)\vartriangle(A\vartriangle B)$
$A\rightarrow B$	$=_{df}$	$A\vartriangle(B\vartriangle B)$
$A\leftarrow B$	$=_{df}$	$B\vartriangle(A\vartriangle A)$
$A\leftrightarrow B$	$=_{df}$	$((A\vartriangle(B\vartriangle B))\vartriangle(B\vartriangle(A\vartriangle A)))\vartriangle((A\vartriangle(B\vartriangle B))\vartriangle(B\vartriangle(A\vartriangle A)))$
$A\veebar B$	$=_{df}$	$((A\vartriangle A)\vartriangle(B\vartriangle B))\vartriangle((A\vartriangle A)\vartriangle(B\vartriangle B))$
$A\underline{\rightarrow}B$	$=_{df}$	$(A\vartriangle(B\vartriangle B))\vartriangle(A\vartriangle(B\vartriangle B))$
$A\underline{\leftarrow}B$	$=_{df}$	$((A\vartriangle A)\vartriangle B)\vartriangle((A\vartriangle A)\vartriangle B)$
$A<B$	$=_{df}$	$(A\vartriangle(B\vartriangle(B\vartriangle B)))\vartriangle(A\vartriangle(B\vartriangle(B\vartriangle B)))$ (eller A)
$A>B$	$=_{df}$	$(B\vartriangle(A\vartriangle(A\vartriangle A)))\vartriangle(B\vartriangle(A\vartriangle(A\vartriangle A)))$ (eller B)
$A\leq B$	$=_{df}$	$A\vartriangle(B\vartriangle(B\vartriangle B))$ (eller $A\vartriangle A$)
$A\geq B$	$=_{df}$	$B\vartriangle(A\vartriangle(A\vartriangle A))$ (eller $B\vartriangle B$)
$A\underline{\leftrightarrow}B$	$=_{df}$	$(((A\vartriangle A)\vartriangle(B\vartriangle B))\vartriangle(A\vartriangle B))\vartriangle(((A\vartriangle A)\vartriangle(B\vartriangle B))\vartriangle(A\vartriangle B))$

Negerad disjunktion (varken eller) som enda primitiv operator

$\top$	$=_{df}$	$(A\veebar(A\veebar A))\veebar(A\veebar(A\veebar A))$
$\underline{\top}$	$=_{df}$	$(A\veebar A)\veebar A$
$\mathbf{S}A$	$=_{df}$	$(A\veebar A)\veebar(A\veebar A)$ (eller A)
$\mathbf{F}A$	$=_{df}$	$(A\veebar A)$
$\neg A$	$=_{df}$	$(A\veebar A)$
$A\vee B$	$=_{df}$	$(A\veebar B)\veebar(A\veebar B)$
$A\wedge B$	$=_{df}$	$(A\veebar A)\veebar(B\veebar B)$
$A\rightarrow B$	$=_{df}$	$((A\veebar A)\veebar B)\veebar((A\veebar A)\veebar B)$
$A\leftarrow B$	$=_{df}$	$((B\veebar B)\veebar A)\veebar((B\veebar B)\veebar A)$
$A\leftrightarrow B$	$=_{df}$	$((A\veebar A)\veebar B)\veebar((B\veebar B)\veebar A)$
$A\vartriangle B$	$=_{df}$	$((A\veebar A)\veebar(B\veebar B))\veebar((A\veebar A)\veebar(B\veebar B))$
$A\underline{\rightarrow}B$	$=_{df}$	$(A\veebar A)\veebar B$
$A\underline{\leftarrow}B$	$=_{df}$	$A\veebar(B\veebar B)$
$A<B$	$=_{df}$	$(A\veebar A)\veebar(B\veebar(B\veebar B))$ (eller A)
$A>B$	$=_{df}$	$(A\veebar(A\veebar A))\veebar(B\veebar B)$ (eller B)
$A\leq B$	$=_{df}$	$((A\veebar A)\veebar(B\veebar(B\veebar B)))\veebar((A\veebar A)\veebar(B\veebar(B\veebar B)))$ (eller $A\veebar A$)
$A\geq B$	$=_{df}$	$((A\veebar(A\veebar A))\veebar(B\veebar B))\veebar((A\veebar(A\veebar A))\veebar(B\veebar B))$ (eller $B\veebar B$)
$A\underline{\leftrightarrow}B$	$=_{df}$	$(((A\veebar A)\veebar B)\veebar((B\veebar B)\veebar A))\veebar(((A\veebar A)\veebar B)\veebar((B\veebar B)\veebar A))$

Negation (inte) och konjunktion (och) som enda primitiva operatorer

$\top$	$=_{df}$	$\neg(A \wedge \neg A)$
$\underline{\top}$	$=_{df}$	$A \wedge \neg A$
$\mathbf{S}A$	$=_{df}$	A
$\mathbf{F}A$	$=_{df}$	$\neg A$
$A \vee B$	$=_{df}$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$
$A \rightarrow B$	$=_{df}$	$\neg(A \wedge \neg B)$
$A \leftarrow B$	$=_{df}$	$\neg(\neg A \wedge B)$
$A \leftrightarrow B$	$=_{df}$	$\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A)$
$A \underline{\wedge} B$	$=_{df}$	$\neg(A \wedge B)$
$A \underline{\rightarrow} B$	$=_{df}$	$A \wedge \neg B$
$A \underline{\leftarrow} B$	$=_{df}$	$\neg A \wedge B$
$A < B$	$=_{df}$	$A \wedge \neg(B \wedge \neg B)$ (eller A)
$A > B$	$=_{df}$	$\neg(A \wedge \neg A) \wedge B$ (eller B)
$A \leq B$	$=_{df}$	$\neg(A \wedge \neg(B \wedge \neg B))$ (eller $\neg A$)
$A \geq B$	$=_{df}$	$\neg(\neg(A \wedge \neg A) \wedge B)$ (eller $\neg B$)
$A \underline{\leftrightarrow} B$	$=_{df}$	$\neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(A \wedge B)$
$A \underline{\vee} B$	$=_{df}$	$\neg A \wedge \neg B$

Negation (inte) och disjunktion (eller) som enda primitiva operatorer

$\top$	$=_{df}$	$A \vee \neg A$
$\underline{\top}$	$=_{df}$	$\neg(A \vee \neg A)$
$\mathbf{S}A$	$=_{df}$	A
$\mathbf{F}A$	$=_{df}$	$\neg A$
$A \wedge B$	$=_{df}$	$\neg(\neg A \vee \neg B)$
$A \rightarrow B$	$=_{df}$	$\neg A \vee B$
$A \leftarrow B$	$=_{df}$	$A \vee \neg B$
$A \leftrightarrow B$	$=_{df}$	$\neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A))$
$A \underline{\wedge} B$	$=_{df}$	$\neg A \vee \neg B$
$A \underline{\rightarrow} B$	$=_{df}$	$\neg(\neg A \vee B)$
$A \underline{\leftarrow} B$	$=_{df}$	$\neg(A \vee \neg B)$
$A < B$	$=_{df}$	$\neg(\neg A \vee \neg(B \vee \neg B))$ (eller A)
$A > B$	$=_{df}$	$\neg(\neg(A \vee \neg A) \vee \neg B)$ (eller B)
$A \leq B$	$=_{df}$	$\neg A \vee \neg(B \vee \neg B)$ (eller $\neg A$)
$A \geq B$	$=_{df}$	$\neg(A \vee \neg A) \vee \neg B$ (eller $\neg B$)
$A \underline{\leftrightarrow} B$	$=_{df}$	$\neg(\neg(A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee \neg B))$
$A \underline{\vee} B$	$=_{df}$	$\neg(A \vee B)$

Hur avgör vi om en definition är rimlig eller ej? Vi är fria att definiera våra logiska symboler på vilket sätt som helst. Men eftersom vi vill att de olika symbolerna skall representera vissa sanningsfunktioner är inte alla definitioner rimliga. Vi vill t.ex. att $\vee$ skall representera $f_{\vee}$. Givet denna tolkning, hur avgör vi t.ex. om definitionen av $\vee$ i termer av $\triangle$ är rimlig, dvs. hur avgör vi om följande definition är rimlig: $A \vee B =_{df} (A \triangle A) \triangle (B \triangle B)$? Det kan vi göra genom att visa att $A \vee B$ är logiskt ekvivalent med $(A \triangle A) \triangle (B \triangle B)$ då $\vee$ representerar $f_{\vee}$ och $\triangle$ representerar $f_{\triangle}$. Detta kan i sin tur visas t.ex. med hjälp av sanningstabeller på sedvanligt sätt. (Övning: visa att alla definitioner ovan är rimliga.)

2.4. Substitution och ersättning

2.4.1. Substitutionsfunktioner

1. En substitutionsfunktion, s, är en funktion från mängden av satsbokstäver till mängden av välformade formler. Mängden av välformade formler varierar från språk till språk, men substitutionsfunktionerna kan i princip definieras på samma sätt för alla språk.
2. Vi kan utvidga en substitutionsfunktion till en funktion från mängden av alla satser till mängden av alla satser. Låt $©_1$ vara ett monadiskt konnektiv som ingår i vårt språk, låt $©_2$ vara ett dyadiskt konnektiv i vårt språk, och låt Γ vara en mängd satser. Resultatet av att tillämpa s på en godtycklig sats A kan då definieras rekursivt på följande sätt:
   (i) Om p är en satsbokstav, så ges s(p) av 1.
   (ii) $s(©_1 A) = ©_1 s(A)$.
   (iii) $s(A ©_2 B) = (s(A) ©_2 s(B))$.
3. $s(\Gamma) = \{s(A)$: A är ett element i $\Gamma\}$.

Exempel. (i) Låt s(p) = q och s(A) = A för varje annan satsbokstav. Då gäller det att $s(\neg p \to \neg p) = (s(\neg p) \to s(\neg p))$ [från 2.(iii)] $= (\neg s(p) \to \neg s(p))$ [från 2.(ii)] $= (\neg q \to \neg q)$ [från definitionen av s]. (ii) $s(\neg p \to \neg(p \wedge r)) = (s(\neg p) \to s(\neg(p \wedge r)))$ [från 2.(iii)] $= (\neg s(p) \to \neg s(p \wedge r))$ [från 2.(ii)] $= (\neg s(p) \to \neg(s(p) \wedge s(r)))$ [från 2.(iii)] $= (\neg q \to \neg(q \wedge r))$ [från definitionen av s]. ■

Om s(b) = B, så skall vi också använda följande notation ”[B/b]” för ”s”, dvs. [B/b] är en substitutionsfunktion som för argumentet b ger värdet B.

Låt b vara en godtycklig satsbokstav och låt A och B vara godtyckliga välformade formler i vårt språk. Då är [B/b](A) (eller (A)[B/b]) den sats som är resultatet av att substituera (byta ut) varje förekomst av b i A med B, dvs. [B/b](A) (eller (A)[B/b]) är resultatet av att tillämpa [B/b] på A. Om b inte förekommer i A, så är [B/b](A) = A. (Om A t.ex. är en satsbokstav skild från b, så är [B/b](A)= A.) En sats A' kallas en *omedelbar substitutionsinstans* av A omm det finns en sats p i A och någon välformad formel B sådan att A' = [B/p](A).

Exempel. Låt b = p, B = $(p\wedge q)$ och A = $(p\to p)$. Då är [B/b](A) = $[(p\wedge q)/p](p\to p) = ((p\wedge q)\to(p\wedge q))$. Låt b = q, B = $((p\to r)\to r)$ och A = $(p\to(q\to r))$. Då är [B/b](A) = $[((p\to r)\to r)/q](p\to(q\to r)) = (p\to(((p\to r)\to r)\to r))$. Låt b = r, B = $(p\vee\neg p)$ och A = $(p\to p)$. Då är [B/b](A) = $[(p\vee\neg p)/r](p\to p) = (p\to p)$. ■

2.4.2. Simultan substitution

Om $s(b_1) = B_1, \ldots,$ och $s(b_n) = B_n$, skall vi också använda följande notation "$[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n]$" för "s", dvs. $[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n]$ är en substitutionsfunktion som för argumentet b_1 ger värdet $B_1, \ldots,$ och för argumentet b_n ger värdet B_n.

Låt $b_1, \ldots, b_n$ vara godtyckliga distinkta (icke-identiska) satsbokstäver och låt A och $B_1, \ldots, B_n$ vara godtyckliga välformade formler. Då är $[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n](A)$ (eller $(A)[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n]$) den sats som är resultatet av simultan substitution av $B_1, \ldots, B_n$ för $b_1, \ldots, b_n$ för alla förekomster av $b_1, \ldots, b_n$ i A, dvs. $[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n](A)$ ($(A)[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n]$) är resultatet av att tillämpa substitutionsfunktionen $[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n]$ på A. Det är tillåtet att inte alla satsbokstäver $b_1, \ldots, b_n$ förekommer i A. Om ingen av $b_1, \ldots, b_n$ förekommer i A, så är $[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n](A)$ = A. En sats A' kallas en *simultan substitutionsinstans* av A omm det finns några satser $b_1, \ldots, b_n$ i A och några välformade formler $B_1, \ldots, B_n$ sådana att A' = $[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n](A)$.

Exempel. Låt $b_1 = p$, $b_2 = q$, $B_1 = r$, $B_2 = s$ och A = $((p\to q)\to(\neg p\vee q))$. Då är $[B_1/b_1, B_2/b_2](A) = [r/p, s/q]((p\to q)\to(\neg p\vee q)) = ((r\to s)\to(\neg r\vee s))$. Låt $b_1 = p$, $b_2 = q$, $B_1 = q$, $B_2 = (p\wedge s)$ och A = $((p\wedge q)\to(p\vee q))$. Då är $[B_1/b_1, B_2/b_2](A) = [q/p, p\wedge s/q]((p\wedge q)\to(p\vee q)) = ((q\wedge(p\wedge s))\to(q\vee(p\wedge s)))$. Låt $b_1 = p_1$, $b_2 = q$, $b_3 = r$, $B_1 = r$, $B_2 = (s\vee\neg s)$, $B_3 = q_2$ och A = $(p\vee q\vee r)$. Då är $[B_1/b_1, B_2/b_2, B_3/b_3](A) = [r/p_1, (s\vee\neg s)/q, q_2/r](p\vee q\vee r) = (p\vee(s\vee\neg s)\vee q_2)$. ■

Notera att en och samma satsbokstav inte ersätts med olika satser när vi använder en substitutionsfunktion. Olika satsbokstäver kan emellertid ersättas med samma sats. $\neg(p\wedge\neg p)$ är t.ex. en substitutionsinstans av $\neg(p\wedge\neg q)$, men $\neg(p\wedge\neg q)$ är inte en substitutionsinstans av $\neg(p\wedge\neg p)$.

Vi skall säga att en substitutionsfunktion som är injektiv och vars räckvidd är mängden av alla satsbokstäver är en *återbokstavering*.

Notera också skillnaden mellan successiva substitutioner och simultana substitutioner. ■

Exempel. Låt A = $(p \to q) \to (\neg p \to q)$. Då är $[p \wedge q/p, p/q](A)$ inte identisk med $[p \wedge q/p]([p/q](A))$; $[p \wedge q/p, p/q](A)$ är inte identisk med $[p/q]([p \wedge q/p](A))$ och $[p \wedge q/p]([p/q](A))$ är inte identisk med $[p/q]([p \wedge q/p](A))$. $[p \wedge q/p, p/q]((p \to q) \to (\neg p \to q)) = ((p \wedge q) \to p) \to (\neg(p \wedge q) \to p)$, $[p \wedge q/p]([p/q]((p \to q) \to (\neg p \to q))) = [p \wedge q/p]((p \to p) \to (\neg p \to p)) = ((p \wedge q) \to (p \wedge q)) \to (\neg(p \wedge q) \to (p \wedge q))$ och $[p/q]([p \wedge q/p]((p \to q) \to (\neg p \to q))) = [p/q](((p \wedge q) \to q) \to (\neg(p \wedge q) \to q)) = ((p \wedge p) \to p) \to (\neg(p \wedge p) \to p)$. ■

2.4.3. Ersättning

Uttrycket ”[C//B](A)” (eller ”(A)[C//B]”) står för resultatet av att ersätta (byta ut) noll eller flera förekomster av B med C i A. ”[C//B](A)” kan beteckna olika satser i olika kontexter. Om det är klart att vi talar om ersättning och inte substitution, så kan ersättningsoperationen betecknas på samma sätt som substitutionsfunktionerna, dvs. ”[C/B](A)” (eller ”(A)[C/B]”).

Exempel. Låt A = $(p \wedge q) \to (p \to q)$, B = p och C = $\neg\neg p$. Då kan [C//B](A), dvs. $[\neg\neg p//p]((p \wedge q) \to (p \to q))$, stå för någon av följande satser: $(p \wedge q) \to (p \to q)$, $(\neg\neg p \wedge q) \to (p \to q)$, $(p \wedge q) \to (\neg\neg p \to q)$ eller $(\neg\neg p \wedge q) \to (\neg\neg p \to q)$. Låt A = $\neg(p \wedge \neg p)$, B = p och C = $p \wedge p$. Då kan [C//B](A), dvs. $[p \wedge p//p](\neg(p \wedge \neg p))$ stå för någon av följande satser: $\neg(p \wedge \neg p)$, $\neg((p \wedge p) \wedge \neg p)$, $\neg(p \wedge \neg(p \wedge p))$ eller $\neg((p \wedge p) \wedge \neg(p \wedge p))$. ■

2.4.4. Simultan ersättning

Följande notation $[C_1//B_1, \ldots, C_n//B_n](A)$ står för resultatet av att samtidigt (simultant) ersätta noll eller flera förekomster av B_1 med C_1 och … och ersätta noll eller flera förekomster av B_n med C_n i A.

Exempel. Låt A = $p \to (\neg q \vee r)$, $B_1 = p$, $B_2 = \neg q \vee r$, $C_1 = \neg\neg p$ och $C_2 = (q \to r)$. Då kan $[C_1//B_1, C_2//B_2](A)$, dvs. $[\neg\neg p//p, (q \to r)//(\neg q \vee r)](p \to (\neg q \vee r))$ stå för någon av följande satser: $p \to (\neg q \vee r)$, $\neg\neg p \to (\neg q \vee r)$, $p \to (q \to r)$, eller $\neg\neg p \to (q \to r)$. ■

För mer information om ersättning och simultan ersättning, se Avsnitt 4.1.

I Avsnitt 4.1 kommer jag att ta upp några ersättnings- och substitutionsregler, som använder begreppen ersättning och substitution. Ersättning påminner om substitution, men det finns också några viktiga skillnader mellan dessa begrepp då de används i våra regler.

Då vi *ersätter* (*byter ut*) A mot B krävs det att $A \leftrightarrow B$ är ett teorem, då vi *substituerar* A för p är det inte nödvändigt att $A \leftrightarrow p$ är ett teorem.

Då vi ersätter A med B i en sats S behöver vi inte byta ut varje förekomst av A i S, men då vi substituerar A för p i S, måste vi byta ut varje förekomst av p i S mot A.

När vi *substituerar* A för p, måste p vara atomär, men det är inte nödvändigt att A är atomär, om vi *ersätter* A med B. B kan emellertid vara komplex så väl som atomär i båda fallen. (Se vidare Avsnitt 4.1.)

3. Semantik

Låt C vara mängden av alla konnektiv som ingår i vårt språk, V en mängd sanningsvärden, D en mängd designerade sanningsvärden (D är en delmängd av V), och $\{f_{\copyright}: \copyright \in C\}$ en mängd sanningsfunktioner, en för varje konnektiv © i C. Om © är ett n-ställigt konnektiv, så är $f_{\copyright}$ en n-ställig sanningsfunktion. Då kan klassisk satslogik sägas vara definierad av följande struktur: $\langle V, D, \{f_{\copyright}: \copyright \in C\}\rangle$. V innehåller sanningsvärdena T (Det Sanna) och F (Det Falska). Ty enligt klassisk satslogik är varje sats antingen sann eller falsk och inte både sann och falsk, och varje sats kan betraktas som ett namn på ett av dessa värden. D utgörs av de sanningsvärden som bevaras i giltiga slutledningar. Enligt klassisk satslogik är det sanning som bevaras i giltiga slutledningar. Alltså är $D = \{T\}$. För varje konnektiv © i C gäller det att $f_{\copyright}$ är den sanningsfunktion ”©” refererar till, denoterar, står för, eller uttrycker. De monadiska konnektiven uttrycker 1-ställiga sanningsfunktioner, de binära konnektiven uttrycker 2-ställiga sanningsfunktioner osv. En 1-ställig sanningsfunktion är en funktion som tar ett sanningsvärde som argument och ger ett sanningsvärde som värde, en 2-ställig sanningsfunktion är en funktion som tar två sanningsvärden som input och ger ett sanningsvärde som output, osv. ”$\neg$” står t.ex. för den 1-ställiga sanningsfunktionen $f_{\neg}$, som för argumentet T ger värdet F och argumentet F ger värdet T, dvs. $f_{\neg}(T) = F$, och $f_{\neg}(F) = T$. ”$\wedge$” denoterar den 2-ställiga sanningsfunktionen $f_{\wedge}$ som ger värdet T omm båda argumenten är T (om minst ett av argumenten är F ger den värdet F), dvs. $f_{\wedge}(T, T) = T$, $f_{\wedge}(T, F) = F$, $f_{\wedge}(F, T) = F$, och $f_{\wedge}(F, F) = F$. ”$\veebar$” refererar till den 2-ställiga sanningsfunktionen $f_{\veebar}$. $f_{\veebar}(T, T) = F$, $f_{\veebar}(T, F) = F$, $f_{\veebar}(F, T) = F$, $f_{\veebar}(F, F) = T$. Osv.[1]

[1] Tanken att de satslogiska konnektiven uttrycker sanningsfunktioner och att satser är ett slags namn på sanningsvärden utvecklades av en av den moderna logikens främsta pionjärer Frege, se t.ex. (1879), (1995). Teorin kan förefalla vara prima facie kontraintuitiv. Den tycks medföra att sanningen och falskheten är ett slags objekt och att alla sanna satser betyder samma sak. Men är inte sanningen en egenskap eller en relation? Och kan inte olika sanna satser ha olika betydelser? Det finns inte utrymme i den här uppsatsen att diskutera dessa frågor. Teorin har emellertid visat sig vara enormt fruktbar. För mer information om sanningsvärden och -funktioner, se t.ex.

En sanningsfunktion som tar n argument är definierad för 2^n (2 upphöjt till n) olika argument. För varje sådant argument antar funktionen ett av två möjliga värden (Det Sanna eller Det Falska), vilket innebär att det finns 2^(2^n) (2 upphöjt till 2 upphöjt till n) olika sanningsfunktioner med n argument. Således finns det t.ex. 4 olika sanningsfunktioner som tar 1 argument, 16 olika sanningsfunktioner som tar 2 argument, 256 sanningsfunktioner som tar 3 argument osv.

Varje sanningsfunktion kan beskrivas av en sanningstabell, där vi för varje möjlig sekvens av n sanningsvärden anger det sanningsvärde, som funktionen tilldelar sekvensen, eller – som man också kan uttrycka det – det sanningsvärde, som funktionen antar när argumentet utgörs av sekvensen ifråga. Tabell 1 sammanfattar alla 1-ställiga sanningsfunktioner, och Tabell 2 innehåller alla 2-ställiga sanningsfunktioner.

A	**S**	**F**	$\neg$	$\top$	$\underline{\top}$
S	S	F	F	S	F
F	F	S	S	S	F

Tabell 1

Tabell 1 skall läsas på följande sätt. Om A är sann, så är **S**A sann; och om A är falsk, så är **S**A falsk. Om A är sann, så är $\neg$A falsk; och om A är falsk, så är $\neg$A sann. $\top$A är sann oberoende av om A är sann eller falsk; $\underline{\top}$A är falsk oberoende av om A är sann eller falsk. Osv.

A	B	$\wedge$	$\underline{\wedge}$	$\vee$	$\underline{\vee}$	$\rightarrow$	$\underline{\rightarrow}$	$\leftrightarrow$	$\underline{\leftrightarrow}$	$\leftarrow$	$\underline{\leftarrow}$	$<$	$\leq$	$>$	$\geq$	$\top$	$\underline{\top}$
S	S	S	F	S	F	S	F	S	F	S	F	S	F	S	F	S	F
F	S	F	S	S	F	S	F	F	S	F	S	F	S	S	F	S	F
S	F	F	S	S	F	F	S	F	S	S	F	S	F	F	S	S	F
F	F	F	S	F	S	S	F	S	F	S	F	F	S	F	S	S	F

Tabell 2

Tabell 2 skall läsas på följande sätt. Om A är sann och B är sann, så är A $\wedge$ B sann. Om A är falsk och B är sann, så är A $\wedge$ B falsk. Om A är sann och B är falsk, så är A $\wedge$ B falsk. Och om A är falsk och B är falsk, så är A $\wedge$ B falsk. Osv. Tabellen innehåller s.a.s. sanningstabellerna för alla binära konnektiv.

Gabriel (1984), Shramko & Wansing (red.). (2009), (2009b). Olika sanningsteorier presenteras bl.a. i Kirkham (1992) och Künne (2003).

En värdering eller tolkning, v, är en funktion från satsbokstäverna till sanningsvärdena i V. För varje satsbokstav, p, gäller det att v(p) antingen är T eller F och inte både T och F; dvs. varje atomär sats är antingen sann eller falsk, och inte både sann och falsk. Om v(A) = T, så skall vi säga att A är sann under värderingen (eller tolkningen) v eller att v gör A sann; om v(A) = F, så skall vi säga att A är falsk under värderingen (eller tolkningen) v eller att v gör A falsk. Antag att vårt språk innehåller konstanterna T och $\underline{\mathsf{T}}$. Då gäller det att $v(\mathsf{T}) = T$ och att $v(\underline{\mathsf{T}}) = F$, för varje värdering v, dvs. T är alltid sann under varje värdering och $\underline{\mathsf{T}}$ är alltid falsk under varje värdering. En sådan funktion kan utökas till en funktion från alla satser till V genom att tillämpa de olika sanningsfunktionerna rekursivt. Låt © vara ett monadiskt konnektiv och ® ett binärt konnektiv. Då gäller det att:

(i) $v(©A) = f_{©}(v(A))$.

(ii) $v(A®B) = f_{®}(v(A), v(B))$.

Exempel. $v(\neg(p \vee q)) = f_{\neg}(v(p \vee q)) = f_{\neg}(f_{\vee}(v(p), v(q)))$. Antag att v(p) = F och v(q) = F, dvs. att både p och q är falska. Då är $f_{\vee}(v(p), v(q)) = F$. Det följer att $f_{\neg}(f_{\vee}(v(p), v(q))) = S$, dvs. $f_{\neg}(f_{\vee}(F, F)) = S$. Med andra ord, $v(\neg(p \vee q)) = S$, dvs. $\neg(p \vee q)$ är sann under värderingen v. ■

Vi skall kalla $\langle V, D, \{f_{©}: © \in C\}\rangle$ för en värdestruktur eller en ram. En värdestruktur tillsammans med en värderings- eller tolkningsfunktion, $\langle V, D, \{f_{©}: © \in C\}, v\rangle$, är en modell. Givet denna begreppsapparat kan vi också säga att en sats A är sann i en modell $\langle V, D, \{f_{©}: © \in C\}, v\rangle$ omm A är sann under v; och att en sats A är falsk i en modell $\langle V, D, \{f_{©}: © \in C\}, v\rangle$ omm A är falsk under v.[2]

3.1. Några centrala semantiska begrepp

Jag skall nu definiera några grundläggande semantiska begrepp.

Logisk sanning. En sats A är (sats)logiskt sann omm den är sann under varje värdering. En sats som är satslogiskt sann brukar också kallas för en tautologi.

Logisk falskhet. En sats A är (sats)logiskt falsk omm den är falsk under varje värdering.

[2] Denna grundläggande typ av semantik kan enkelt utvidgas till s.k. flervärd logik, som antar att det finns fler sanningsvärden än Det Sanna och Det Falska, t.ex. Det Obestämda (varken sanna eller falska). Vi antar då helt enkelt att V innehåller dessa extra sanningsvärden och betraktar sanningsfunktionerna som funktioner som tar input från V och ger ett värde från V. D utgör fortfarande en delmängd av V och värderingsfunktionen tilldelar satsbokstäverna ett och endast ett sanningsvärde i V. För mer information om flervärd logik, se t.ex. Haack (1974), Priest (2008), Kap. 7–9, Hähnle (2001) och Urquhart (2001).

Satisfierbarhet (satser). En sats A är satisfierbar omm den är sann under minst en värdering.

Falsifierbarhet (satser). En sats A är falsifierbar omm den är falsk under minst en värdering.

Logisk kontingens. En sats A är (sats)logiskt kontingent omm den är satisfierbar och falsifierbar, dvs. omm den är sann under minst en värdering och falsk under minst en värdering.

Logisk implikation. En sats A implicerar (sats)logiskt (medför satslogiskt) en sats B omm B är sann under varje värdering som A är sann. Ekvivalent: omm $A \to B$ är (sats)logiskt sann.

Logisk ekvivalens. Två satser, A och B, är (sats)logiskt ekvivalenta omm de har samma sanningsvärde (som varandra) under varje värdering. Ekvivalent: omm $A \leftrightarrow B$ är satslogiskt sann. Ekvivalent: omm A medför B och B medför A. Ekvivalent: omm $A \to B$ och $B \to A$ är satslogiskt sanna.

Logisk följd. En mängd satser Γ medför en sats B omm det inte finns någon värdering som gör alla premisser i Γ sanna och slutsatsen B falsk. Om Γ medför B skall vi också säga att B följer (sats)logiskt ur Γ. Med andra ord: B följer ur Γ omm varje värdering som gör alla satser i Γ sanna också gör B sann.

Satisfierbarhet (mängder av satser). En mängd satser Γ är satisfierbar omm det finns minst en värdering som gör alla satser i Γ sanna.

Falsifierbarhet (mängder av satser). En mängd satser är falsifierbar omm det finns minst en värdering som gör alla satser i Γ falska.

3.2. Några sanningsfunktioner

Flera satslogiska konnektiv och sanningsfunktioner är mycket välkända; $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, och $\leftrightarrow$ presenteras t.ex. i nästan varje introduktion till satslogiken. Andra konnektiv och de sanningsfunktioner de representerar är mindre utforskade. I det här avsnittet skall jag säga lite om några av de senare.

3.2.1. $\top$ (Verum) och $\underline{\top}$ (Falsum)

Verum, $\top$, och Falsum, $\underline{\top}$, kan tolkas som konstanter ($\top_0$, $\underline{\top}_0$), monadiska ”sanningsfunktioner” ($\top_1$, $\underline{\top}_1$) eller dyadiska ”sanningsfunktioner” ($\top_2$, $\underline{\top}_2$). Som konstanter är de i sig välformade; $\top$, och $\underline{\top}$ är välformade. Då Verum och Falsum tolkas som monadiska satsoperatorer gäller det att om A är en sats, så är $\top A$ och $\underline{\top}A$ satser. Då de betraktas som dyadiska satsoperatorer gäller det att om A och B är satser, så är $A \top B$ och $A \underline{\top} B$ satser. Som funktioner tar de oss alltid till Det Sanna, respektive Det Falska. $\top A$ är sann oavsett vilket sanningsvärde A har och $\underline{\top}A$ är falsk oavsett vilket sanningsvärde A har. $A \top B$ är sann oavsett vilka sanningsvärden A och B har;

och A $\underline{\top}$ B är falsk oavsett vilka sanningsvärden A och B har. Följande ekvivalenser är satslogiskt sanna:

$\top \leftrightarrow \top A \leftrightarrow \top(A \wedge B) \leftrightarrow (\top A \wedge \top B) \leftrightarrow (A \top B)$
$\underline{\top} \leftrightarrow \underline{\top}A \leftrightarrow \underline{\top}(A \wedge B) \leftrightarrow (\underline{\top}A \wedge \underline{\top}B) \leftrightarrow (A \underline{\top} B)$
$A \leftrightarrow (A \leftrightarrow \top)$ A omm A är ekvivalent med Verum.
$\mathbf{S}A \leftrightarrow (A \leftrightarrow \top)$ Det är sant att A omm A är ekvivalent med Verum.
$\neg A \leftrightarrow (A \leftrightarrow \underline{\top})$ Inte A omm A är ekvivalent med Falsum.
$\mathbf{F}A \leftrightarrow (A \leftrightarrow \underline{\top})$ Det är falskt att A omm A är ekvivalent med Falsum.
Låt © vara ett binärt konnektiv. Då gäller det generellt att $((A \copyright B) \leftrightarrow \top) \leftrightarrow ((A \leftrightarrow \top) \copyright (B \leftrightarrow \top))$ är satslogiskt sann.

3.2.2. S (Det är sant att) och F (Det är falskt att)

Jag har ovan introducerat två monadiska satsoperatorer **S** och **F**, som inte brukar ingå i olika satslogiska språk. Den monadiska satsoperatorn **S** tar oss från Det Sanna till Det Sanna och från Det Falska till Det Falska, medan **F** tar oss från Det Sanna till Det Falska och från Det Falska till Det Sanna. Jag vill nu argumentera för att det är fruktbart att införa dessa operatorer eftersom de ofta kan användas för att symbolisera uttrycken ”Det är sant att” respektive ”Det är falskt att”. Jag skall med andra ord argumentera för att uttrycken ”Det är sant att” och ”Det är falskt att” ofta i svenska används för att uttrycka ett slags sanningsfunktioner och att detsamma gäller många andra liknande uttryck i andra naturliga språk, såsom de engelska uttrycken ”It is true that” och ”It is false that”. Detta kan ses som ett komplement till andra klassiska sanningsteorier. Jag skall kalla denna teori (eller hypotes) för den funktionella sanningsteorin (för uttrycken ”Det är sant att” och ”Det är falskt att”). Notera först att alla satser i följande tabell (Tabell 3) är logiskt sanna:

$\mathbf{S}A \vee \mathbf{F}A$, $\neg(\mathbf{S}A \wedge \mathbf{F}A)$, $\mathbf{S}A \leftrightarrow A$, $\mathbf{S}A \leftrightarrow \neg\mathbf{F}A$, $\mathbf{F}A \leftrightarrow \neg\mathbf{S}A$, $\mathbf{F}A \leftrightarrow \neg A$ (enligt denna ekvivalens uttrycker ”Det är falskt att” samma sanningsfunktion som ”Det är inte fallet att”), $\mathbf{S}\neg A \leftrightarrow \neg\mathbf{S}A$, $\mathbf{S}(A \wedge B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \wedge \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \vee B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \vee \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \rightarrow \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \leftrightarrow \mathbf{S}B)$.
Faktum är att det generellt gäller att $\mathbf{S}(A \copyright B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \copyright \mathbf{S}B)$ för alla binära konnektiv.[3]

Tabell 3

[3] Dvs. även följande satser är logiskt sanna: $\mathbf{S}(A \underline{\triangle} B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \underline{\triangle} \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \underline{\vee} B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \underline{\vee} \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \underline{\rightarrow} B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \underline{\rightarrow} \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \underline{\leftarrow} B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \underline{\leftarrow} \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \underline{\leftrightarrow} B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \underline{\leftrightarrow} \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A < B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A < \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A > B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A > \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \top A) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \top \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \underline{\top} A) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \underline{\top} \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \leftarrow B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \leftarrow \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \leq B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \leq \mathbf{S}B)$, $\mathbf{S}(A \geq B) \leftrightarrow (\mathbf{S}A \geq \mathbf{S}B)$.

Här följer tre argument för den funktionella sanningsteorin.

Argument 1. Teorin kan förklara en mängd plattityder om uttrycken ”Det är sant att” och ”Det är falskt att”. Alla satser nedan tycks t.ex. vara sanna.

Varje sats är antingen sann eller falsk, dvs. det är sant att A eller det är falskt att A (för varje A).

Ingen sats är både sann och falsk, dvs. det är inte fallet att det är sant att A och att det är falskt att A (för något A).

Det är sant att A omm A.

Det är sant att A omm det inte är falskt att A.

Det är falskt att A omm det inte är sant att A.

Det är falskt att A omm det inte är fallet att A.

Det är sant att inte-A omm det inte är sant att A.

Det är sant att A och B omm det är sant att A och det är sant att B.

Det är sant att A eller B omm det är sant att A eller det är sant att B.

Det är sant att om A så B omm om det är sant att A så är det sant att B.

Det är sant att A omm B omm det är sant att A omm det är sant att B.

Alla dessa satser följer ur den funktionella sanningsteorin, eftersom alla satser i Tabell 3 är satslogiskt sanna. Detta talar för den funktionella sanningsteorin.

Argument 2. Teorin kan förklara varför uttrycket ”Det är sant att” är redundant i en viss mening. ”Det är sant att A” är, om den funktionella sanningsteorin är sann, ekvivalent med ”A”. Varje sats av formen ”**S**A” är ekvivalent med en sats som inte innehåller ”**S**”, som vi har sett ovan. Men vi kan visa något starkare. Vi kan visa att varje sats som innehåller **S** (Det är sant att) är ekvivalent med en sats som inte innehåller detta konnektiv. (Detta är lätt att se i ljuset av de ekvivalenser som omnämns i Tabell 3 ovan.) Allt som kan sägas med sanningsbegreppet kan därför i en viss mening sägas utan det.[4]

Argument 3. Teorin kan förklara varför det s.k. regressproblemet inte är något problem. Detta hänger ihop med punkten omedelbar ovan. Många filosofer har uppmärksammat att varje sanning tycks ge upphov till en

---

[4] Konnektivet **F** (Det är falskt att) är redundant i vissa system men inte i alla. I ett språk som innehåller negationstecknet och disjunktionstecknet är det t.ex. redundant. Men i ett språk som innehåller enbart **F** och konjunktionstecknet är det t.ex. inte redundant. Det är inte redundant eftersom språket L{$\wedge$} inte är sanningsfunktionellt komplett. Stryker man **F** från L{**F**, $\wedge$} kan man inte uttrycka alla möjliga sanningsfunktioner.

oändlig mängd nya sanningar. Om A, så är det sant att A. Om det är sant att A, så är det sant att det är sant att A. Om det är sant att det är sant att A, så… För vissa sanningsteorier är en sådan oändligt serie med sanningar möjligtvis problematisk, t.ex. om vi antar att varje sanning korresponderar med ett unikt faktum. I så fall måste vi anta att det existerar en oändlig mängd fakta för varje sanning. Det kan diskuteras om detta verkligen är ett problem. Men oavsett hur det förhåller sig med den saken, tycks det inte vara ett problem för den funktionella sanningsteorin. Visserligen gäller det att $A \leftrightarrow \mathbf{S}A \leftrightarrow \mathbf{SS}A \leftrightarrow \mathbf{SSS}A$… osv. Men detta tycks vara fullständigt oproblematiskt.

3.2.3. Varken eller, Inte både och, och Exklusivt eller

Det tycks inte finnas några enskilda ord i svenskan som svarar mot konnektiven $\underline{\vee}$, $\underline{\wedge}$, $\underline{\leftrightarrow}$, på samma sätt som t.ex. ”eller” svarar mot $\vee$ och ”och” mot $\wedge$. Visserligen finns det vissa som menar att ”eller” kan tolkas på två olika sätt: ”inklusivt” eller ”exklusivt”. Enligt den ”inklusiva” läsningen är ”A eller B” sann om både A och B är sanna; enligt den exklusiva interpretationen är ”A eller B” falsk när både A och B är sanna. Om det här är riktigt, kan $\underline{\leftrightarrow}$ användas för att uttrycka den exklusiva tolkningen. Inte alla håller dock med om att ”eller” är mångtydigt på detta sätt. ”$A \underline{\vee} B$” kan läsas ”varken A eller B”; och ”$A \underline{\wedge} B$” ”inte både A och B”. Vad är förklaringen till att det tycks finnas svenska ord som uttrycker vissa binära sanningsfunktioner, men att inte alla sanningsfunktioner tycks kunna uttryckas med enskilda ord? En möjlig förklaring är att t.ex. ”varken eller”, ”inte både och” och ”exklusivt eller” är ”negationerna” av ”eller”, ”och” respektive ”om och endast om” och att de därför är mer komplicerade. Men det är tveksamt om denna förklaring är tillräcklig. Det omvända gäller ju också: ”eller”, ”och” och ”om och endast om” är ”negationerna” av ”varken eller”, ”inte både och”, respektive ”inte om och endast om”. Troligtvis är det dock mer naturligt för människor att handskas med vissa sanningsfunktioner. Man skulle kunna tänka sig att införa ett antal nya svenska ord som uttrycker de sanningsfunktioner som denoteras av $\underline{\vee}$, $\underline{\wedge}$, och $\underline{\leftrightarrow}$, t.ex. ”neller” för varken eller, ”noch” för inte både och, och ”xeller” för exklusivt eller. Men det lär nog dröja innan Svenska Akademien tar in dessa nyord i sin ordlista.

3.3. Formella egenskaper hos de binära sanningsfunktionerna

I det här avsnittet kommer jag att undersöka vilka formella egenskaper de olika binära konnektiven eller sanningsfunktionerna har. Jag kommer att koncentrera mig på reflexivitet, irreflexivitet, symmetri (kommutativitet), asymmetri, transitivitet, intransitivitet, associativitet och idempotens. Jag skall börja med att definiera hur dessa begrepp används i den här uppsatsen. Låt © vara ett binärt konnektiv. Då gäller följande:

© är reflexivt omm $A \copyright A$ är logiskt sann.
© är irreflexivt omm $\neg(A \copyright A)$ är logiskt sann.
© är symmetriskt omm $(A \copyright B) \rightarrow (B \copyright A)$ är logiskt sann.
© är kommutativt omm $(A \copyright B) \leftrightarrow (B \copyright A)$ är logiskt sann.
© är asymmetriskt omm $(A \copyright B) \rightarrow \neg(B \copyright A)$ är logiskt sann.
© är transitivt omm $((A \copyright B) \wedge (B \copyright C)) \rightarrow (A \copyright C)$ är logiskt sann.
© är intransitivt omm $((A \copyright B) \wedge (B \copyright C)) \rightarrow \neg(A \copyright C)$ är logiskt sann.
© är associativt omm $(A \copyright (B \copyright C)) \leftrightarrow ((A \copyright B) \copyright C)$ är logiskt sann.
© är idempotent omm $(A \copyright A) \leftrightarrow A$ är logiskt sann.

Om ett konnektiv © är reflexivt, transitivt etc. i denna mening, så skall vi också säga att den sanningsfunktion $f_{\copyright}$ som detta konnektiv uttrycker är reflexivt, transitivt osv. (Övning: bevisa alla resultat i Avsnitt 3.3 och 3.4.)

Reflexivitet. Följande konnektiv är reflexiva: $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$, och $\top$. Inga andra konnektiv är reflexiva, dvs. inget av följande konnektiv är reflexivt: $\underline{\rightarrow}$, $\underline{\leftarrow}$,$\vee$, $\veebar$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\wedge$, $\vartriangle$, $\underline{\top}$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

Irreflexivitet. Följande konnektiv är irreflexiva: $\underline{\rightarrow}$, $\underline{\leftarrow}$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\underline{\top}$. Inga andra konnektiv är irreflexiva, dvs. inget av följande konnektiv är irreflexivt: $\rightarrow$, $\leftarrow$,$\vee$, $\veebar$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vartriangle$, $\top$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

Symmetri. Följande konnektiv är symmetriska (kommutativa): $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\top$, $\underline{\top}$, $\vartriangle$, $\veebar$. Inga andra konnektiv är symmetriska (kommutativa), dvs. inget av följande konnektiv är symmetriskt: $\rightarrow$, $\underline{\rightarrow}$, $\leftarrow$, $\underline{\leftarrow}$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

Asymmetri. Följande konnektiv är asymmetriska: $\underline{\rightarrow}$, $\underline{\leftarrow}$, $\underline{\top}$. Inga andra konnektiv är asymmetriska, dvs. inget av följande konnektiv är asymmetriskt: $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\vee$, $\veebar$, $\leftrightarrow$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\wedge$, $\vartriangle$, $\top$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

Transitivitet. Följande konnektiv är transitiva: $\rightarrow$, $\underline{\rightarrow}$, $\leftarrow$, $\underline{\leftarrow}$, $\veebar$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\top$, $\underline{\top}$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$. Inga andra konnektiv är transitiva, dvs. inget av följande konnektiv är transitivt: $\vee$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\vartriangle$.

Intransitivitet. Följande konnektiv är intransitiva: $\underline{\rightarrow}$, $\underline{\leftarrow}$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\underline{\top}$.
Inga andra konnektiv är intransitiva, dvs. inget av följande konnektiv är intransitivt: $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\vee$, $\veebar$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vartriangle$, $\top$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

Associativitet. Följande konnektiv är associativa: $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\underline{\leftrightarrow}$, $<$, $>$, $\top$, $\underline{\top}$.
Inga andra konnektiv är associativa, dvs. inget av följande konnektiv är associativt: $\rightarrow$, $\underline{\rightarrow}$, $\leftarrow$, $\underline{\leftarrow}$, $\veebar$, $\vartriangle$, $\geq$, $\leq$.

Idempotens. Följande konnektiv är idempotenta: $\wedge$, $\vee$, $<$, $>$. Inga andra konnektiv är idempotenta, dvs. inget av följande konnektiv är idempotent: $\rightarrow$, $\underline{\rightarrow}$, $\leftarrow$, $\underline{\leftarrow}$, $\underline{\vee}$, $\leftrightarrow$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\triangle$, $\top$, $\underline{\top}$, $\geq$, $\leq$.

3.4. Relationer mellan olika binära konnektiv

Vi har nu undersökt några formella egenskaper hos våra konnektiv. I det här och nästa två avsnitt skall vi se närmare på några relationer mellan de olika konnektiven eller sanningsfunktionerna. Det här avsnittet innehåller en lista på de konnektiv som ”distribuerar” över konjunktion och disjunktion.

Distribution. Ett binärt konnektiv, ©, är distributivt (distribuerar) över det binära konnektivet, ®, omm (A © (B ® C)) $\leftrightarrow$ ((A © B) ® (A © C)) är logiskt sann.

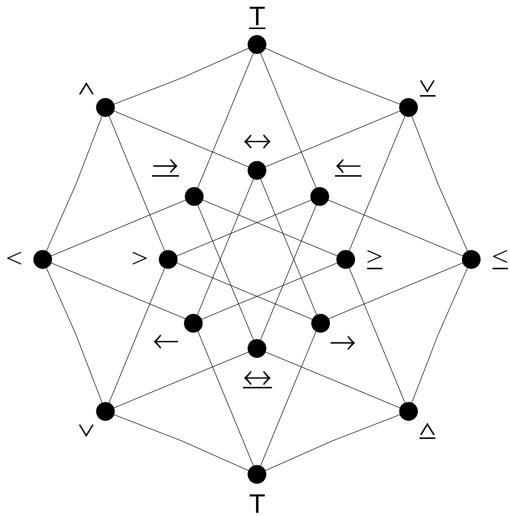
Distributiva över konjunktion. (A © (B $\wedge$ C)) $\leftrightarrow$ ((A © B) $\wedge$ (A © C)). Följande konnektiv är distributiva (distribuerar) över konjunktion: $\rightarrow$, $\underline{\leftarrow}$, $\vee$, $\wedge$, $<$, $\leq$, $>$, $\top$, $\underline{\top}$. Följande konnektiv är inte distributiva (distribuerar inte) över konjunktion: $\underline{\rightarrow}$, $\leftarrow$, $\underline{\vee}$, $\leftrightarrow$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\triangle$, $\geq$.

Distributiva över disjunktion. (A © (B $\vee$ C)) $\leftrightarrow$ ((A © B) $\vee$ (A © C)). Följande konnektiv är distributiva (distribuerar) över disjunktion: $\wedge$, $\vee$, $\leq$, $\rightarrow$, $\underline{\leftarrow}$, $<$, $>$, $\top$, $\underline{\top}$. Följande konnektiv är inte distributiva (distribuerar inte) över disjunktion: $\triangle$, $\underline{\vee}$, $\geq$, $\leftrightarrow$, $\leftarrow$, $\underline{\rightarrow}$, $\underline{\leftrightarrow}$.

3.4.1. Implikationer mellan binära konnektiv

Figur 1 nedan består av två oktagoner. Sammanlagt innehåller figuren 16 noder. Varje nod representerar ett binärt konnektiv (och en 2-ställig sanningsfunktion). Figuren visar den relativa styrkan hos de binära sanningsfunktionerna. © är minst lika starkt som (implicerar eller medför) ® omm (A © B) $\rightarrow$ (A ® B) är logiskt sann. Alla konnektiv är minst lika starka som sig själva. © är starkare än ® omm © implicerar ®, men ® inte implicerar ©. Inget konnektiv är starkare än sig självt. © och ® är lika starka omm © implicerar ® och ® implicerar ©. En operator högre upp i Figur 1 är starkare än en operator längre ned om den senare kan nås från den tidigare via en linje. $\underline{\top}$ är starkast, $\underline{\top}$ implicerar alla andra konnektiv; $\top$ är svagast, $\top$ impliceras av alla konnektiv. Det är trivialt sant att $\underline{\top}$ implicerar alla konnektiv, eftersom en implikation med falsk försats är sann oberoende av vilket sanningsvärde eftersatsen har. Det är trivialt sant att $\top$ impliceras av alla konnektiv, eftersom en implikation med sann eftersats är sann oberoende av vilket sanningsvärde försatsen har. Två konnektiv är ojämförbara omm det varken är fallet att det tidigare implicerar det senare eller att det senare implicerar det tidigare.

Exempel. Från Figur 1 kan vi t.ex. avläsa att ∧ implicerar: ∧, <, >, ∨, ↔, →, ←, T, och inga andra konnektiv. ↔ implicerar: ↔, →, ←, T och inga andra konnektiv. ∨ implicerar: ∨ och T, och inga andra konnektiv. ∧ och $\underline{\vee}$ är ojämförbara; och ∨ och $\underline{\triangle}$ är ojämförbara. ■



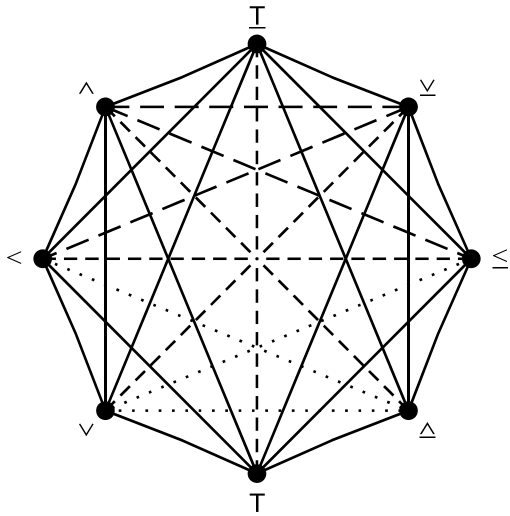
Figur 1

3.4.2. Kontradiktoriska, konträra och subkonträra konnektiv

Logisk implikation är inte den enda typen av relation mellan olika konnektiv. Konnektiv (och de sanningsfunktioner de representerar) kan också vara t.ex. kontradiktoriska, konträra eller subkonträra. Låt © och ® vara två binära konnektiv. Då definierar vi dessa begrepp på följande sätt:

© och ® är kontradiktoriska omm (A©B)↔¬(A®B) är logiskt sann.
© och ® är konträra omm ¬((A©B)∧(A®B)) är logiskt sann.
© och ® är subkonträra omm (A©B)∨(A®B) är logiskt sann.

Satser som befinner sig mitt emot varandra i den yttre eller inre oktagonen är kontradiktoriska (Figur 1, 2, och 3). © och $\underline{©}$ är kontradiktoriska. En understruken operator är kontradiktorisk med motsvarande operator som inte är understruken. Den understrukna operatorn är s.a.s ”negationen” av den icke understrukna operatorn (och tvärtom). (A $\underline{©}$ B) ↔ ¬(A © B) är logiskt sann, dvs. (A$\underline{©}$B) och ¬(A©B) är logiskt ekvivalenta (och tvärtom).



Figur 2

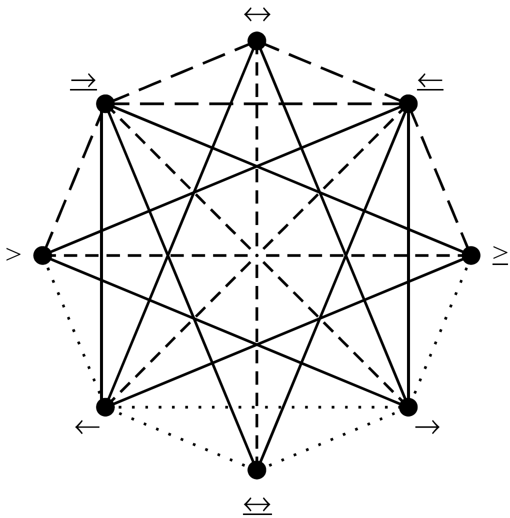
Figur 2 och 3 innehåller information om hur de olika konnektiven är relaterade till varandra, om de är kontradiktoriska, konträra eller subkonträra. Om två satser är förbunda med varandra med en streckad linje som består av långa streck, så är de konträra. Om två satser är förbundna med varandra med en streckad linje som består av halvlånga streck, så är de kontradiktoriska. Om två satser är förbundna med varandra med en prickad linje, så är de subkonträra.

Exempel. Figur 2: ∧ och $\underline{\triangle}$ är kontradiktoriska; ∧ och $\underline{\vee}$ är konträra; ∨ och $\underline{\triangle}$ är subkonträra. Figur 3: → och $\underline{\rightarrow}$ är kontradiktoriska; $\underline{\rightarrow}$ och $\underline{\leftarrow}$ är konträra; → och ← är subkonträra.

Det finns också vissa förhållanden mellan konnektiven i den yttre och i den inre oktagonen i Figur 1, eller mellan konnektiven i Figur 2 och de i Figur 3. Följande konnektiv är konträra eller subkonträra.

Konträra konnektiv: ∧ och $\underline{\leftarrow}$; ∧ och $\underline{>}$; ∧ och $\underline{\rightarrow}$; ∧ och $\underline{\leftrightarrow}$; $\underline{\vee}$ och $\underline{\rightarrow}$; $\underline{\vee}$ och >; $\underline{\vee}$ och $\underline{\leftarrow}$; $\underline{\vee}$ och $\underline{\leftrightarrow}$; < och $\underline{\leftarrow}$; ≤ och $\underline{\rightarrow}$.

Subkonträra konnektiv: $\leftrightarrow$ och $\vee$; $\leftrightarrow$ och $\vartriangle$; $>$ och $\vartriangle$; $\geq$ och $\vee$; $\leftarrow$ och $\vee$; $\leftarrow$ och $\vartriangle$; $\rightarrow$ och $\vee$; $\rightarrow$ och $\vartriangle$; $<$ och $\rightarrow$; $\leq$ och $\leftarrow$. ■



Figur 3

3.5. Fullständiga uppsättningar konnektiv

En uppsättning konnektiv (ett enskilt konnektiv) är satslogiskt fullständigt (eller komplett) omm det kan uttrycka alla sanningsfunktioner (av ställighet 1 eller högre). Här följer några exempel på fullständiga och icke fullständiga uppsättningar konnektiv.

Exempel. Exempel på fullständiga uppsättningar konnektiv: $\{\vartriangle\}$, $\{\underline{\vee}\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\underline{\top}, \rightarrow\}$. Exempel på mängder av konnektiv som inte är fullständiga: $\{\wedge, \rightarrow\}$, $\{\vee, \rightarrow\}$. $\underline{\vee}$ (varken eller), och $\vartriangle$ (inte både och) är de enda (binära) konnektiv som själva är fullständiga. ■

Vi har i Avsnitt 2.3 ovan sett hur alla monadiska och binära konnektiv kan definieras i termer av $\vartriangle$, $\underline{\vee}$, $\neg$ och $\vee$, eller $\neg$ och $\wedge$. Detta resultat är emellertid inte tillräckligt för att bevisa att alla sanningsfunktioner kan definieras i termer av dessa konnektiv, eftersom det också finns 3-ställiga, 4-ställiga… osv. sanningsfunktioner. För ett bevis av olika ”fullständighetsresultat”, se t.ex. Pelletier och Norman (1990), Enderton (2001), ss. 45–52, Hunter (1971), ss. 62–71. Emil Post tycks ha varit först med att bevisa ”fullständighetsresultat” av detta slag, se Post (1921). Se också Bimbó (2010), Nicod (1917–20), Prior (1955), Kap. II, Schönfinkel (1924/1967), Sheffer (1913), Wernick (1942), Żyliński (1925). Peirce bör också nämnas i sammanhanget, se t.ex. Bimbó (2010).

3.6. Satslogik simulerad i predikatlogik

I det här avsnittet skall vi se hur man kan ”simulera” satslogiken i predikatlogik. För att göra det krävs någon form av predikatlogik med funktionsuttryck. I ett sådant system kan vi införa särskilda namn som refererar till Det Sanna respektive Det Falska, och definiera ett antal funktionsuttryck som svarar mot olika sanningsfunktioner. Med hjälp av vissa grundläggande antaganden och definitioner kan vi sedan t.ex. bevisa predikatlogiska satser som motsvarar alla satslogiska sanningar. Vi antar nedan att x och y varierar över satser. Bevisen lämnas till läsaren.

3.6.1. Vokabulär

v(x): x’s sanningsvärde. v är en funktion som tar oss från x till x’s sanningsvärde.
n(x): negationen av x, k(x,y) konjunktionen av x och y, d(x,y) disjunktionen av x och y, i(x,y) implikationen av x och y, e(x,y) ekvivalensen av x och y. ”n”, ”k”, ”d”, ”i”, ”e” är funktionsuttryck som representerar ett antal sanningsfunktioner, som tar oss från sanningsvärden till sanningsvärden.
”t” är ett namn på Det Sanna, och ”f” är ett namn på Det Falska.
Vx: x är ett sanningsvärde. V är ett 1-ställigt predikat.

3.6.2. Grundläggande antaganden

A1. $\forall x((v(x) = t) \vee (v(x) = f))$. Det gäller för varje x att x’s sanningsvärde är Det Sanna eller att x’s sanningsvärde är Det Falska.
A2. $\forall x \neg((v(x) = t) \wedge (v(x) = f))$. Det gäller för varje x att det inte är fallet att x’s sanningsvärde är Det Sanna och att x’s sanningsvärde är Det Falska.

3.6.3. Definitioner av sanningsfunktionerna

D1. $\forall x \forall y((v(n(x)) = t) \leftrightarrow (v(x) = f))$. Sanningsvärdet hos negationen av x är Det Sanna omm x’s sanningsvärde är Det Falska.
D2. $\forall x \forall y((v(k(x,y)) = t) \leftrightarrow ((v(x) = t) \wedge (v(y) = t)))$. Sanningsvärdet hos konjunktionen av x och y är Det Sanna omm x’s sanningsvärde är Det Sanna och y’s sanningsvärde är Det Sanna.

D3. $\forall x\forall y((v(d(x,y)) = t) \leftrightarrow ((v(x) = t) \vee (v(y) = t)))$. Sanningsvärdet hos disjunktionen av x och y är Det Sanna omm x's sanningsvärde är Det Sanna eller y's sanningsvärde är Det Sanna.
D4. $\forall x\forall y((v(i(x,y)) = t) \leftrightarrow ((v(x) = t) \rightarrow (v(y) = t)))$. Sanningsvärdet hos implikationen av x och y är Det Sanna omm om x's sanningsvärde är Det Sanna så är y's sanningsvärde Det Sanna.
D5. $\forall x\forall y((v(e(x,y)) = t) \leftrightarrow ((v(x) = t) \leftrightarrow (v(y) = t)))$. Sanningsvärdet hos ekvivalensen av x och y är Det Sanna omm x's sanningsvärde är Det Sanna omm y's sanningsvärde är Det Sanna.

Övriga sanningsfunktioner kan definieras på liknande sätt.

3.6.4. Definition av sanningsvärde

Det är möjligt att explicit ange att t och f är sanningsvärden. Men vi skall istället använda följande definition:
D6. $\forall z(Vz \leftrightarrow \exists y(z=v(y)))$.
z är ett sanningsvärde omm det finns ett y sådant att z är y's sanningsvärde.

3.6.5. Definition av sanningspredikat

Antag att sannings- och falskhetspredikaten definieras i termer av konstanterna t och f på följande sätt:
D7. $\forall x(Sx \leftrightarrow (v(x)=t))$. x är sann omm x's sanningsvärde är Det Sanna.
D8. $\forall x(Fx \leftrightarrow (v(x)=f))$. x är falsk omm x's sanningsvärde är Det Falska.

3.6.6. Teorem

Givet dessa antaganden och definitioner kan vi bevisa bl.a. följande satser:

T1. $\forall x(Sx \vee Fx)$. Varje sats är antingen sann eller falsk.
T2. $\forall x\neg(Sx \wedge Fx)$. Ingen sats är både sann och falsk.
T3. $\forall x\forall y(Sn(x) \leftrightarrow Fx)$. Negationen av x är sann omm x är falsk.
T4. $\forall x\forall y(Sk(x,y) \leftrightarrow (Sx \wedge Sy))$. Konjunktionen av x och y är sann omm x är sann och y är sann.
T5. $\forall x\forall y(Sd(x,y) \leftrightarrow (Sx \vee Sy))$. Disjunktionen av x och y är sann omm x är sann eller y är sann.
T6. $\forall x\forall y(Si(x,y) \leftrightarrow (Sx \rightarrow Sy))$. Implikationen av x och y är sann omm om x är sann så är y sann.
T7. $\forall x\forall y(Se(x,y) \leftrightarrow (Sx \leftrightarrow Sy))$. Ekvivalensen av x och y är sann omm x är sann omm y är sann.
T8. Vt: Det Sanna är ett sanningsvärde.

T9. Vf: Det Falska är ett sanningsvärde.
T10. $\neg t = f$. Det Sanna är inte identiskt med Det Falska.
T11. $\forall x((v(x) = f) \leftrightarrow \neg(v(x) = t))$ x's sanningsvärde är Det Falska omm det inte är fallet att x's sanningsvärde är Det Sanna.
T12. $\exists w \exists z(\neg(w = z) \wedge (Vw \wedge Vz))$. Det finns minst två sanningsvärden.
T13. $\forall u \forall w \forall z((Vu \wedge Vw \wedge Vz) \rightarrow (u = w \vee u = z \vee w = z))$. Det finns högst två sanningsvärden.
T14. $\exists u \exists w(Vu \wedge Vw \wedge \neg u{=}w \wedge \forall z(Vz \rightarrow (z = u \vee z = w)))$. Det finns exakt två sanningsvärden. Detta följer ur T12 och T13.
T15. $\forall x \forall y((v(x) = v(y)) \leftrightarrow (v(e(x,y)) = t))$. x's sanningsvärde är identiskt med y's sanningsvärde omm sanningsvärdet hos ekvivalensen av x och y är Det Sanna.
T16. $\forall x \forall y((v(x) = v(y)) \leftrightarrow Se(x,y))$. x's sanningsvärde är identiskt med y's sanningsvärde omm ekvivalensen av x och y är sann.

3.6.7. Alternativa antaganden

Låt D7' och D8' vara:
D7'. $\forall x((v(x) = t) \leftrightarrow Sx)$. x's sanningsvärde är Det Sanna omm x är sann.
D8'. $\forall x((v(x) = f) \leftrightarrow Fx)$. x's sanningsvärde är Det Falska omm x är falsk.

Då gäller det att om vi utgår ifrån T1–T7, D6 och D7' och D8', så kan vi bevisa A1–A2, D1–D5, och T8–T16.

Den utvidgning av predikatlogiken som beskrivs ovan kan bl.a. användas för att uttrycka satslogiska sanningar i predikatlogiken. DeMorgans lagar $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ och $(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$ kan t.ex. uttryckas på följande sätt:

DM1 $\forall x \forall y(Sk(x,y) \leftrightarrow Sn(d(n(x),n(y))))$.

DM2 $\forall x \forall y(Sd(x,y) \leftrightarrow Sn(k(n(x),n(y))))$.

DM1 säger: ”Det gäller för alla x och y att konjunktionen av x och y är sann omm negationen av disjunktionen av negationen av x och negationen av y är sann”.

DM2 läses ”Det gäller för alla x och y att disjunktionen av x och y är sann omm negationen av konjunktionen av negationen av x och negationen av y är sann”.

Vi kan bevisa att DM1 och DM2 följer predikatlogiskt ur våra antaganden ovan. Övriga satslogiska sanningar kan bevisas på liknande sätt.[5]

---

[5] Se Anderson och Zalta (2004) för mer information om några liknande idéer och definitioner. Anderson och Zalta utgår emellertid ifrån Zaltas s.k. Objekt Teori och deras tankar skiljer sig på flera väsentliga punkter från de idéer som presenteras i det här avsnittet.

4. Bevisteori

4.1. Några användbara regler

Jag skall i det här avsnittet nämna några användbara satslogiska regler. Dessa regler kan t.ex. bevisas i alla de axiomatiseringar av satslogiken som beskrivs i Appendixet. Substitutionsregeln används ofta som en grundläggande regel och övriga regler som härledda. $\vdash_S$ A innebär att A är ett teorem i S, där S är någon sund och fullständig variant av satslogiken.

Substitutionsregeln. Om $\vdash_S$ A, så $\vdash_S$ [B/b](A). Om A är ett teorem i S, så är varje omedelbar substitutionsinstans av A ett teorem i S.

Exempel. Antag att vi har bevisat att $p \rightarrow p$ är ett teorem i S. Då följer det t.ex. omedelbart ur substitutionsregeln att också $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$ och $(r \vee q) \rightarrow (r \vee q)$ är teorem i S. För dessa satser är omedelbara substitutionsinstanser av $p \rightarrow p$. ■

Den simultana substitutionsregeln. Om $\vdash_S$ A, så $\vdash_S$ $[B_1/b_1, \ldots, B_n/b_n]$(A). Om A är ett teorem i S, så är varje simultan substitutionsinstans av A ett teorem i S.

Exempel. Antag att vi har bevisat att $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ är ett teorem i S. Då följer det omedelbart ur den simultana substitutionsregeln att t.ex. också $((r \wedge s) \wedge ((r \wedge s) \rightarrow (r \rightarrow s))) \rightarrow (r \rightarrow s)$ är ett teorem i S. Faktum är att det följer att varje instans av schemat $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ är ett teorem i S. För varje instans av detta schema följer ur $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ med hjälp av den simultana substitutionsregeln. ■

Om det är klart vilket system vi talar om, kan vi utelämna ”S”.

Ersättningsregeln. (i) Om $\vdash$ $A \leftrightarrow B$, så $\vdash$ $C \leftrightarrow$ [B//A](C) (om $A \leftrightarrow B$ är ett teorem, så är $C \leftrightarrow$ [B//A](C) ett teorem), där [B//A](C) är likadan som C förutom att noll eller flera förekomster av A har ersatts med B (se Avsnitt 2.4 för mer information).

(ii) Om $\vdash$ $A \leftrightarrow B$ och $\vdash$ C, så $\vdash$ [B//A](C) (om $A \leftrightarrow B$ är ett teorem och C är ett teorem, så är [B//A](C) ett teorem), där C och [B//A](C) tolkas på samma sätt som i del (i).

(iii) Om $\vdash$ $A \leftrightarrow B$ och $\vdash$ [B//A](C), så $\vdash$ C (om $A \leftrightarrow B$ är ett teorem och [B//A](C) är ett teorem, så är C ett teorem), där C och [B//A](C) förstås på samma sätt som i del (i).

Exempel. Om vi har bevisat att $(p \wedge q) \rightarrow q$ och $p \leftrightarrow \neg\neg p$ är teorem, så kan vi omedelbart med hjälp av ersättningsregeln sluta oss till att $(\neg\neg p \wedge q) \rightarrow q$ är ett teorem. Om vi har bevisat att $(p \rightarrow (q \wedge q)) \rightarrow \neg(p \wedge \neg(q \wedge q))$ och $q \leftrightarrow (q \wedge q)$ är teorem, så kan vi omedelbart med hjälp av ersättningsregeln sluta oss till att $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ är ett teorem. ■

Den simultana ersättningsregeln. (i) Om $\vdash A_1 \leftrightarrow B_1$ och … och $\vdash A_n \leftrightarrow B_n$ så $\vdash C \leftrightarrow [B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ (om $A_1 \leftrightarrow B_1$ är ett teorem och … och $A_n \leftrightarrow B_n$ är ett teorem, så är $C \leftrightarrow [B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ ett teorem), där $[B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ är resultatet av att ersätta noll eller flera förekomster av A_1 i C med B_1 och … och ersätta noll eller flera förekomster av A_n i C med B_n.

(ii) Om $\vdash A_1 \leftrightarrow B_1$ och … och $\vdash A_n \leftrightarrow B_n$ och $\vdash C$, så $\vdash [B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ (om $A_1 \leftrightarrow B_1$ är ett teorem och … och $A_n \leftrightarrow B_n$ är ett teorem och C är ett teorem, så är $[B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ ett teorem), där C och $[B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ tolkas på samma sätt som i del (i).

(iii) Om $\vdash A_1 \leftrightarrow B_1$ och … och $\vdash A_n \leftrightarrow B_n$ och $\vdash C \leftrightarrow [B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$, så $\vdash C$ (om $A_1 \leftrightarrow B_1$ är ett teorem och … och $A_n \leftrightarrow B_n$ är teorem och $[B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ är ett teorem, så är C ett teorem), där C och $[B_1//A_1, \ldots, B_n//A_n](C)$ förstås på samma sätt som i del (i).

Exempel. Om vi har bevisat att $(\neg p \rightarrow (q \vee q)) \rightarrow (\neg\neg p \vee (q \vee q))$, $\neg\neg p \leftrightarrow p$, och $(q \vee q) \leftrightarrow q$ är teorem, så kan vi med hjälp av den simultana ersättningsregeln t.ex. omedelbart sluta oss till att $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q)$ är ett teorem. Om vi har bevisat att $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$, $(p \wedge \top) \leftrightarrow p$, och $(q \vee \bot) \leftrightarrow q$ är teorem, så kan vi t.ex. omedelbart med hjälp av ersättningsregeln sluta oss till att $((p \rightarrow q) \wedge \neg(q \vee \bot)) \rightarrow \neg(p \wedge \top)$ är ett teorem. ■

4.2. Semantiska tablåer och semantiska tablåsystem

I det här avsnittet skall jag gå igenom några s.k. tablåregler, som kan användas för att skapa en mängd semantiska tablåsystem. Semantiska tablåer kan bl.a. användas för att bevisa att en sats är satslogiskt sann, satslogiskt falsk eller satslogiskt kontingent, de kan användas för att avgöra om en mängd satser är konsistent eller inte, och de kan användas för att avgöra om ett argument är satslogiskt giltigt eller ej (se Avsnitt 4.5 nedan).

Evert Beth tycks ha varit först med att beskriva denna metod, se t.ex. Beth (1955) och Beth (1959), ss. 186–201, 267–293, och 444–463. Enligt Smullyan (1968), s. 15, kommer den ursprungliga idén från Gerhard Gentzen (Gentzen (1935), (1935b)). Detta tycks även vara Melvin Fittings åsikt (1999), s. 7. Andra tidiga bidrag utgörs av Hintikka (1955), Lis (1960), Smullyan (1963), (1965), (1966), (1968) och Jeffrey (1967). Den typ av semantiska tablåer som används i den här uppsatsen påminner kanske mest om den typ som beskrivs i Jeffrey (1967). För mer om denna metod, se t.ex. D’Agostino (1999), D’Agostino et al. (1999), Jeffrey (1967), Priest (2008), Rönnedal (2012), och Smullyan (1968). Grundläggande uttryck som

”semantisk tablå”, ”öppen och sluten gren”, ”öppen och sluten tablå”, ”tablåsystem” osv. definieras på vanligt vis (se vidare Avsnitt 4.4). Den här uppsatsen innehåller emellertid en mängd nya tablåregler. I system som innehåller konstanterna T och $\underline{\mathrm{T}}$, måste vi lägga till antagandet att en gren är sluten om den innehåller ¬T eller $\underline{\mathrm{T}}$.

4.3. Semantiska tablåregler

4.3.1. Grundläggande regler

Vilka grundläggande regler ett semantiskt tablåsystem bör innehålla beror på vilket språk vi utgår ifrån. En mycket vanlig uppsättning regler är: (¬¬), (∧), (¬∧), (∨), (¬∨), (→), (¬→), (↔), och (¬↔). Jag skall emellertid introducera regler för alla monadiska och binära operatorer som vi har nämnt i den här uppsatsen.

I princip skulle man kunna klara sig med reglerna (¬¬), ($\triangle$), och (¬$\triangle$), eller (¬¬), ($\veebar$), (¬$\veebar$), om vi utgår ifrån ett språk som endast innehåller ¬ och $\triangle$ eller $\veebar$. Andra konnektiv kan i sådana språk definieras i termer av de grundläggande symbolerna (se Avsnitt 2.3). För att bevisa en sats måste man då först översätta den till primitiv notation och sedan bevisa den översatta satsen. Detta leder till system som är ekonomiska vad gäller antalet primitiva symboler, men är något mer komplicerade att använda i praktiken än många andra system som innehåller fler odefinierade konnektiv och regler.

4.3.2. Satslogiska regler

4.3.2.1. Regler för monadiska konnektiv och CUT

(**S**)	(**F**)	(T)	($\underline{\mathrm{T}}$)	(¬¬)
SA, i ↓ A, i	**F**A, i ↓ ¬A, i	TA, i ↓ T, i	$\underline{\mathrm{T}}$A, i ↓ $\underline{\mathrm{T}}$, i	¬¬A, i ↓ A, i

(¬**S**)	(¬**F**)	(¬T)	(¬$\underline{\mathrm{T}}$)	(CUT)
¬**S**A, i ↓ ¬A, i	¬**F**A, i ↓ A, i	¬TA, i ↓ $\underline{\mathrm{T}}$, i	¬$\underline{\mathrm{T}}$A, i ↓ T, i	… ↙↘ A, i ¬A, i

Tabell 4

Notera att reglerna har ett index ”, i”. Detta är redundant i alla satslogiska system. Anledningen är att dessa regler också kan användas i t.ex. olika modala och temporala system. I sådana system är det väsentligt med ett index.

(CUT) (eller BRYT) regeln är en speciell regel som i många tablåsystem är redundant, t.ex. i det system som innehåller tablåreglerna (¬¬), (∧), (¬∧), (∨), (¬∨), (→), (¬→), (↔), och (¬↔). Allt som kan bevisas med hjälp av denna regel kan vanligtvis bevisas utan den. (CUT) regeln är emellertid mycket användbar om man är intresserad av att förenkla olika bevis. För med hjälp av (CUT) regeln kan man härleda följande regel:

Globala Hypotes Regeln. Om det finns ett tablåbevis för A (i systemet S), så får vi lägga till A till vilken öppen gren som helst i en (S-)tablå.

4.3.2.2. Regler för binära konnektiv

$(\rightarrow)$	$(\underline{\rightarrow})$	$(\leftarrow)$	$(\underline{\leftarrow})$
$A \rightarrow B, i$ ↙↘ $\neg A, i \quad B, i$	$A \underline{\rightarrow} B, i$ ↓ A, i $\neg B, i$	$A \leftarrow B, i$ ↙↘ $A, i \quad \neg B, i$	$A \underline{\leftarrow} B, i$ ↓ $\neg A, i$ B, i
$(\neg\rightarrow)$	$(\neg\underline{\rightarrow})$	$(\neg\leftarrow)$	$(\neg\underline{\leftarrow})$
$\neg(A \rightarrow B), i$ ↓ A, i $\neg B, i$	$\neg(A \underline{\rightarrow} B), i$ ↙↘ $\neg A, i \quad B, i$	$\neg(A \leftarrow B), i$ ↓ $\neg A, i$ B, i	$\neg(A \underline{\leftarrow} B), i$ ↙↘ $A, i \quad \neg B, i$

Tabell 5

$(<)$	$(\leq)$	$(>)$	$(\geq)$
$A<B, i$ ↓ A, i	$A \leq B, i$ ↓ $\neg A, i$	$A>B, i$ ↓ B, i	$A \geq B, i$ ↓ $\neg B, i$
$(\neg<)$	$(\neg\leq)$	$(\neg>)$	$(\neg\geq)$
$\neg(A<B), i$ ↓ $\neg A, i$	$\neg(A \leq B), i$ ↓ A, i	$\neg(A>B), i$ ↓ $\neg B, i$	$\neg(A \geq B), i$ ↓ B, i

Tabell 6

$(\leftrightarrow)$	$(\underline{\leftrightarrow})$	$(\top)$	$(\underline{\top})$
$(A \leftrightarrow B), i$ ↙↘ $A, i \quad \neg A, i$ $B, i \quad \neg B, i$	$A \underline{\leftrightarrow} B, i$ ↙↘ $A, i \quad \neg A, i$ $\neg B, i \quad B, i$	$(A \top B), i$ ↓ $\top, i$	$(A \underline{\top} B), i$ ↓ $\underline{\top}, i$
$(\neg\leftrightarrow)$	$(\neg\underline{\leftrightarrow})$	$(\neg\top)$	$(\neg\underline{\top})$
$\neg(A \leftrightarrow B), i$ ↙↘ $A, i \quad \neg A, i$ $\neg B, i \quad B, i$	$\neg(A \underline{\leftrightarrow} B), i$ ↙↘ $A, i \quad \neg A, i$ $B, i \quad \neg B, i$	$\neg(A \top B), i$ ↓ $\underline{\top}, i$	$\neg(A \underline{\top} B), i$ ↓ $\top, i$

Tabell 7

$(\wedge)$	$(\triangle)$	$(\vee)$	$(\underline{\vee})$
$(A \wedge B), i$ ↓ A, i B, i	$A \triangle B, i$ ↙↘ $\neg A, i \quad \neg B, i$	$(A \vee B), i$ ↙↘ $A, i \quad B, i$	$A \underline{\vee} B, i$ ↓ $\neg A, i$ $\neg B, i$
$(\neg\wedge)$	$(\neg\triangle)$	$(\neg\vee)$	$(\neg\underline{\vee})$
$\neg(A \wedge B), i$ ↙↘ $\neg A, i \quad \neg B, i$	$\neg(A \triangle B), i$ ↓ A, i B, i	$\neg(A \vee B), i$ ↓ $\neg A, i$ $\neg B, i$	$\neg(A \underline{\vee} B), i$ ↙↘ $A, i \quad B, i$

Tabell 8

4.3.2.3. Några härledda regler

Det är ofta möjligt att bevisa ett antal härledda regler i olika tablåsystem. Härledda regler kan användas för att förkorta olika tablåbevis. Nedan följer en lista på några sådana regler som är härledbara i många olika fullständiga tablåsystem. Alla regler i Tabell 9 och 10 är t.ex. härledbara i alla tablåsystem som innehåller tablåreglerna $(\neg\neg)$, $(\wedge)$, $(\neg\wedge)$, $(\vee)$, $(\neg\vee)$, $(\rightarrow)$, $(\neg\rightarrow)$, $(\leftrightarrow)$, och $(\neg\leftrightarrow)$. Med hjälp av Globala Hypotes Regeln kan man härleda en mängd andra intressanta tablåregler. Reglerna i Tabell 9 svarar mot några mycket välkända slutledningsregler som har varit kända mycket länge.

Förklaring av förkortningar i Tabell 9. MP: Modus ponens; MT: Modus tollens; DS: Disjunktiv syllogism; CS: Konjunktiv syllogism; EE: Ekvivalenselimination; HS: Hypotetisk syllogism.

(MP)	(MT)	(DSI)
$A \to B$, i A, i $\downarrow$ B, i	$A \to B$, i $\neg B$, i $\downarrow$ $\neg A$, i	$A \vee B$, i $\neg A$, i $\downarrow$ B, i
(DSII)	**(CSI)**	**(CSII)**
$A \vee B$, i $\neg B$, i $\downarrow$ A, i	$\neg(A \wedge B)$, i A, i $\downarrow$ $\neg B$, i	$\neg(A \wedge B)$, i B, i $\downarrow$ $\neg A$, i
(EEI)	**(EEII)**	**(EEIII)**
$A \leftrightarrow B$, i A, i $\downarrow$ B, i	$A \leftrightarrow B$, i B, i $\downarrow$ A, i	$A \leftrightarrow B$, i $\neg A$, i $\downarrow$ $\neg B$, i
(EEIV)	**(HS)**	**(HS')**
$A \leftrightarrow B$, i $\neg B$, i $\downarrow$ $\neg A$, i	$A \to B$, i $B \to C$, i $\swarrow \searrow$ $\neg A$, i C, i	A, i $A \to B$, i $B \to C$, i $\downarrow$ C, i

Tabell 9

4.3.2.4. Fler härledda regler

(-→)	(¬→-)	(¬-∧)
$\neg A \to B$, i $\swarrow \searrow$ A, i B, i	$\neg(A \to \neg B)$, i $\downarrow$ A, i B, i	$\neg(\neg A \wedge B)$, i $\swarrow \searrow$ A, i $\neg B$, i
(¬-∨-)	**(¬-∧-)**	**(¬-∨)**
$\neg(\neg A \vee \neg B)$, i $\downarrow$ A, i B, i	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$, i $\swarrow \searrow$ A, i B, i	$\neg(\neg A \vee B)$, i $\downarrow$ A, i $\neg B$, i

$(\neg\vee\text{-})$	$(\neg\wedge\text{-})$	$(\vee\to)$
$\neg(A\vee\neg B)$, i	$\neg(A\wedge\neg B)$, i	$(A\vee B)\to C$, i
↓	↙ ↘	A, i
$\neg A$, i	$\neg A$, i B, i	B, i
B, i		↓
		C, i

Tabell 10

4.4. Grundläggande bevisteoretiska begrepp

Låt oss nu definiera ett antal grundläggande bevisteoretiska begrepp. Dessa begrepp är relativiserade till särskilda system. När vi t.ex. säger att en viss sats är bevisbar, så menar vi att den är bevisbar i ett visst system. Om det av kontexten framgår vilket system vi talar om, kan vi dock utelämna denna information, och helt enkelt säga att en sats är bevisbar osv.

Tablåsystem. Ett (semantiskt) tablåsystem är en mängd (semantiska) tablåregler. S$\{X_1, \ldots, X_n\}$ betecknar det tablåsystem som innehåller tablåreglerna $X_1, \ldots, X_n$. S$\{\neg\neg, \wedge, \neg\wedge, \vee, \neg\vee, \to, \neg\to, \leftrightarrow, \neg\leftrightarrow\}$ är t.ex. det tablåsystem som innehåller tablåreglerna $(\neg\neg)$, $(\wedge)$, $(\neg\wedge)$, $(\vee)$, $(\neg\vee)$, $(\to)$, $(\neg\to)$, $(\leftrightarrow)$, och $(\neg\leftrightarrow)$. Inte alla tablåsystem är sunda och fullständiga (se Avsnitt 6). S$\{\wedge, \neg\neg\}$ är t.ex. inte sunt och fullständigt. Men det finns många tablåsystem som är sunda och fullständiga. S$\{\neg\neg, \wedge, \neg\wedge, \vee, \neg\vee, \to, \neg\to, \leftrightarrow, \neg\leftrightarrow\}$ är ett exempel på ett system som är sunt och fullständigt.

S-tablå. En S-tablå är en semantisk tablå som har genererats i enlighet med tablåreglerna i S, där S är ett tablåsystem.

Bevisbarhet. En sats A är bevisbar (i systemet S) omm det finns en sluten (S-)tablå som börjar med $\neg A$.

Teorem. En sats A är ett teorem (i systemet S) omm A är bevisbar (i S).

Konsistens. En mängd satser $\{A_1, \ldots, A_n\}$ är konsistent (i systemet S) omm det finns minst en öppen avslutad gren i en (S-)tablå som börjar med $A_1, \ldots, A_n$. En mängd satser är **inkonsistent** omm den inte är konsistent.

Härledbarhet. En sats B är härledbar ur en mängd satser $\{A_1,\ldots,A_n\}$ (i systemet S) omm det finns en sluten (S-)tablå som börjar med $A_1, \ldots, A_n$, $\neg B$.

4.5. Användningsområden för semantiska tablåsystem

Semantiska tablåsystem är mycket användbara. I det här avsnittet går jag igenom hur de bl.a. kan användas för att avgöra en mängd logiska egenskaper och relationer. När jag talar om ”semantiska tablåer” i det här avsnittet, så menar jag tablåer i något system som är sunt och fullständigt (se Avsnitt 6). Nedan följer en lista på några logiska egenskaper och relationer. Därefter följer en beskrivning av hur man kan avgöra om en viss sats (mängd satser) har denna egenskap eller inte, eller om olika satser står i denna relation till varandra eller inte.

Logisk sanning. Hur avgör man om en sats A är logiska sann eller inte? Skapa en semantisk tablå för $\neg$A. Om alla grenar i denna är slutna, så är A ett teorem. Och om A är ett teorem, så är A logisk sann. Om det finns åtminstone en öppen avslutad gren på den semantiska tablån för $\neg$A, så är A inte logiskt sann, $\neg$A är då satisfierbar.

Logisk falskhet. Hur avgör man om en sats A är logiskt falsk eller inte? Skapa en semantisk tablå som börjar med A. Om alla grenar är slutna, så kan inte A vara sann. Det finns ingen värdering som gör A sann. Alltså måste A vara falsk. Alltså är A logiskt falsk. Om det finns åtminstone en öppen avslutad gren på den semantiska tablån för A, så är A inte logiskt falsk; då är A satisfierbar.

Logisk kontingens. Hur avgör man om en sats A är logiskt kontingent eller inte? För att visa att A är logiskt kontingent, visa att A varken är logiskt sann eller logiskt falsk. A är logiskt kontingent omm det finns minst en öppen avslutad gren på tablån för $\neg$A och minst en öppen avslutad gren på tablån för A. Om A är logiskt sann eller logiskt falsk, så är A inte logiskt kontingent.

Det gäller för varje sats att den antingen är logiskt sann, logiskt falsk, eller logiskt kontingent. Om en sats är logiskt sann, så är den inte logiskt falsk eller logiskt kontingent; om en sats är logiskt falsk, så är den inte logiskt sann eller logiskt kontingent; och om en sats är logiskt kontingent, så är den inte logiskt sann eller logiskt falsk.

Logisk implikation. Hur avgör man om en sats A logiskt implicerar en sats B eller inte? Skapa en semantisk tablå som börjar med A och $\neg$B. Om alla grenar i denna tablå är slutna, så är det inte möjligt att A är sann och B falsk. Med andra ord, varje värdering som gör A sann gör också B sann. Alltså implicerar A B logiskt. Om det finns minst en öppen avslutad gren på en tablå som börjar med A och $\neg$B, så är det inte fallet att A logiskt implicerar B, då finns det en värdering som gör A sann och B falsk.

Logisk ekvivalens. Hur avgör man om två satser A och B är logiskt ekvivalenta eller inte? Visa att A (logiskt) implicerar B och att B (logiskt) implicerar A. Om A implicerar B och B implicerar A, så är A och B logiskt ekvivalenta. Ett alternativ: skapa en tablå som börjar med $\neg$(A$\leftrightarrow$B). Om alla grenar i denna tablå är slutna så är $A \leftrightarrow B$ ett teorem och alltså logiskt sann. Och om $A \leftrightarrow B$ är logiskt sann, så är A och B logiskt ekvivalenta. Om det finns minst en öppen avslutad gren på tablån för $\neg(A \leftrightarrow B)$, så är A och B inte logiskt ekvivalenta.

Satisfierbarhet hos en mängd satser. Hur avgör man om en mängd satser $\{A_1, \ldots, A_n\}$ är satisfierbar eller inte? Skapa en semantisk tablå som börjar med $A_1, \ldots, A_n$. Om det finns åtminstone en öppen avslutad gren i denna tablå, så är $\{A_1, \ldots, A_n\}$ konsistent. Det följer att $\{A_1, \ldots, A_n\}$ är satisfierbar. Om en mängd satser inte är konsistent så är den inte satisfierbar. För att visa att en mängd satser $\{A_1, \ldots, A_n\}$ inte är satisfierbar kan vi då gå tillväga på följande sätt. Skapa en tablå som börjar med $A_1, \ldots, A_n$. Om alla grenar i denna tablå är slutna, så är $\{A_1, \ldots, A_n\}$ inkonsistent. Det följer att denna mängd inte är satisfierbar; dvs. det finns ingen värdering som gör alla satser i denna mängd sanna.

Giltighet hos ett argument. Hur avgör man om ett argument med premisserna $A_1, \ldots, A_n$ och slutsatsen B är logiskt giltigt eller inte? Skapa en tablå som börjar med $A_1, \ldots, A_n, \neg B$. Om alla grenar i denna tablå är slutna, så är slutsatsen härledbar ur premisserna. Givet att systemet är sunt, så följer slutsatsen ur premisserna. Med andra ord, då är argumentet giltigt. Det finns ingen värdering som gör alla premisser sanna och slutsatsen falsk. Ogiltigheten hos ett argument med premisserna $A_1, \ldots, A_n$ och slutsatsen B visas på liknande sätt. Ett argument är ogiltigt omm det inte är giltigt. Skapa en tablå som börjar med $A_1, \ldots, A_n, \neg B$. Om det finns åtminstone en öppen avlutade gren i denna tablå, så är det inte fallet att B är härledbar ur $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Alltså är det inte fallet att B följer ur $\{A_1, \ldots, A_n\}$. För vi utgår ifrån ett system som är sunt och fullständigt. Då finns det åtminstone en värdering som gör alla premisser sanna och slutsatsen falsk. Alltså, det är inte fallet att argumentet är giltigt.

Semantiska tablåer kan användas för att hitta motexempel, värderingar eller modeller som visar att en sats inte är logiskt sann eller att ett argument inte är logiskt giltigt. Denna metod beskrivs i de flesta introduktioner till semantiska tablåer. De kan också ha andra användningsområden. För varje sats A kan de t.ex. användas för att hitta en sats A’ i s.k. disjunktiv normalform som är logiskt ekvivalent med A.

4.6. Exempel på bevis

Det är välkänt hur semantiska tablåer kan användas för att bevisa olika satser. Jag skall ändå ta upp ett par exempel. Vi skall börja med att bevisa $p \vee (p \veebar p)$

i systemet $S\{\neg\neg, \veebar, \neg\veebar\}$, baserat på språket $L\{\neg, \veebar\}$, där övriga monadiska och binära konnektiv är definierade som i Avsnitt 2.3. För att göra det måste vi först översätta $p \vee (p \veebar p)$ till primitiv notation. Satsen $p \vee (p \veebar p)$ är ekvivalent med $(p \veebar (p \veebar p)) \veebar (p \veebar (p \veebar p))$ i primitiv notation. För att bevisa denna sats skapar vi en sluten tablå för dess negation.

$$(1)\ \neg((p\veebar(p\veebar p))\veebar(p\veebar(p\veebar p)))$$

$$\swarrow \quad \searrow$$

(2) $p\veebar(p\veebar p)$ [1, $\neg\veebar$]	(3) $p\veebar(p\veebar p)$ [1, $\neg\veebar$]
(4) $\neg p$ [2, $\veebar$]	(5) $\neg p$ [3, $\veebar$]
(6) $\neg(p\veebar p)$ [2, $\veebar$]	(7) $\neg(p\veebar p)$ [3, $\veebar$]
$\swarrow \quad \searrow$	$\swarrow \quad \searrow$

(8) p [6, $\neg\veebar$]	(9) p [6, $\neg\veebar$]	(10) p [7, $\neg\veebar$]	(11) p [7, $\neg\veebar$]
(12) * [4, 8]	(13) * [4, 9]	(14) * [5, 10]	(15) * [5, 11]

Tabellen ovan är ett bevis för $(p\veebar(p\veebar p))\veebar(p\veebar(p\veebar p))$. $(p\veebar(p\veebar p))\veebar(p\veebar(p\veebar p))$ är alltså ett teorem i $S\{\neg\neg, \veebar, \neg\veebar\}$. Allt som kan bevisas i detta system är (sats)logiskt sant; $S\{\neg\neg, \veebar, \neg\veebar\}$ är ett sunt system. Det följer att vår ursprungliga sats $p\vee(p\veebar p)$ [= $(p\veebar(p\veebar p))\veebar(p\veebar(p\veebar p))$] är (sats)logiskt sann.

Här följer ett annat exempel på ett bevis av satsen $(p \triangle q) \leftrightarrow \neg(\neg p \veebar \neg q)$. Vi använder i det här fallet ett system som innehåller alla tablåregler som vi har tagit upp i den här uppsatsen.

$$(1)\ \neg((p\triangle q)\leftrightarrow\neg(\neg p\veebar\neg q))$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

(2) $(p\triangle q)$ [1, $\neg\leftrightarrow$]	(3) $\neg(p\triangle q)$ [1, $\neg\leftrightarrow$]
(4) $\neg\neg(\neg p\veebar\neg q)$ [1, $\neg\leftrightarrow$]	(5) $\neg(\neg p\veebar\neg q)$ [1, $\neg\leftrightarrow$]
(6) $\neg p\veebar\neg q$ [4, $\neg\neg$]	(7) p [3, $\neg\triangle$]
(8) $\neg\neg p$ [6, $\veebar$]	(9) q [3, $\neg\triangle$]
(10) $\neg\neg q$ [6, $\veebar$]	$\swarrow \quad \searrow$
$\swarrow \quad \searrow$	

		(11) $\neg p$ [5, $\neg\veebar$]	(12) $\neg q$ [5, $\neg\veebar$]
(13) $\neg p$ [2, $\triangle$]	(14) $\neg q$ [2, $\triangle$]	(15) * [7, 11]	(16) * [9, 12]
(17) * [8, 13]	(18) * [10, 14]		

Ovanstående tablå är ett bevis för $(p\triangle q)\leftrightarrow\neg(\neg p\veebar\neg q)$ i vårt system. Denna sats är därför både bevisbar och ett teorem i vårt system. Eftersom detta system är sunt följer det att $(p\triangle q)\leftrightarrow\neg(\neg p\veebar\neg q)$ är (sats)logisk sann. För allt som kan bevisas i ett sunt system är (sats)logiskt sant.

5. Några satslogiska sanningar

Det här avsnittet innehåller en lista på några satslogiska sanningar. I många fall är dessa lagar så etablerade att de har fått särskilda namn. Jag använder satsbokstäver: p, q, r… osv. i alla formler nedan, men tack vare den simultana substitutionsregeln följer det att dessa lagar gäller för alla A, B, C… osv. Motsägelselagen, $\neg(p \wedge \neg p)$, gäller t.ex. inte bara för p, utan för alla A, dvs. $\neg(A \wedge \neg A)$ för alla A. Detsamma gäller övriga sanningar nedan.

Lagarna nedan kan användas för att härleda ett antal satslogiskt sunda regler. Om ”$A \to B$” är ett teorem och ”A” är ett teorem, så följer det att ”B” är ett teorem. Mer allmänt gäller det att om ”$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$” är ett teorem, ”$A_1$” är ett teorem och … och ”A_n” är ett teorem, så är ”B” ett teorem. (Övning: bevisa alla satser i det här avsnittet.)

Grundläggande lagar

$p \leftrightarrow p$	Identitetslagen
$\neg(p \wedge \neg p)$	Motsägelselagen
$p \vee \neg p$	Lagen om det uteslutna tredje
$p \leftrightarrow \neg\neg p$	Lagen om dubbel negation

Idempotenslagar

$p \leftrightarrow (p \vee p)$	Idempotenslagen för disjunktion
$p \leftrightarrow (p \wedge p)$	Idempotenslagen för konjunktion

Absorptionslagar

$(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$	$(p \wedge \top) \leftrightarrow p$	$(p \to \top) \leftrightarrow \top$
$(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$	$(p \wedge \underline{\top}) \leftrightarrow \underline{\top}$	$(p \to \underline{\top}) \leftrightarrow \neg p$
$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \leftrightarrow p$	$(p \vee \top) \leftrightarrow \top$	$(\top \to p) \leftrightarrow p$
$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \leftrightarrow p$	$(p \vee \underline{\top}) \leftrightarrow p$	$(\underline{\top} \to p) \leftrightarrow \top$
$((q \to p) \wedge (\neg q \to p)) \leftrightarrow p$	$(\neg p \to p) \leftrightarrow p$	$(p \leftrightarrow \top) \leftrightarrow p$
$((p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \leftrightarrow \neg p$	$(p \to \neg p) \leftrightarrow \neg p$	$(p \leftrightarrow \underline{\top}) \leftrightarrow \neg p$

Grundläggande lagar för Verum och Falsum

$\neg\top \leftrightarrow \underline{\top}$	$\underline{\top} \to A$	$\top \leftrightarrow (p \vee \neg p)$
$\neg\underline{\top} \leftrightarrow \top$	$A \to \top$	$\underline{\top} \leftrightarrow (p \wedge \neg p)$

Kommutativa, Associativa och Distributiva lagar

$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$	$((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$	$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$	$((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$	$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

De Morgans lagar[6]	
$(p\wedge q)\leftrightarrow\neg(\neg p\vee\neg q)$	$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$
$(p\vee q)\leftrightarrow\neg(\neg p\wedge\neg q)$	$\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$

Adjunktionslagen (AL), Importlagen (IL), exportlagen (EL), kompositionslagar, dekompositionslagar	
$p\to(q\to(p\wedge q))$ (AL)	$(p\to q)\to((r\to s)\to((p\wedge r)\to(q\wedge s)))$
$(p\to(q\to r))\to((p\wedge q)\to r)$ (IL)	$(p\to q)\to((r\to s)\to((p\vee r)\to(q\vee s)))$
$((p\wedge q)\to r)\to(p\to(q\to r))$ (EL)	$(p\to(q\wedge r))\to((p\to q)\wedge(p\to r))$
$((p\wedge q)\to r)\leftrightarrow(p\to(q\to r))$	$((p\vee q)\to r)\to((p\to r)\wedge(q\to r))$
$(p\to q)\to((p\to r)\to(p\to(q\wedge r)))$	$(p\to(q\wedge r))\leftrightarrow((p\to q)\wedge(p\to r))$
$(p\to r)\to((q\to r)\to((p\vee q)\to r))$	$((p\vee q)\to r)\leftrightarrow((p\to r)\wedge(q\to r))$

Modus ponens (MP), modus tollens (MT), påståendelagen (PL), reductio ad absurdumlagen (RL)	
$(p\wedge(p\to q))\to q$ (MP)	$p\to((p\to q)\to q)$ (PL)
$((p\to q)\wedge\neg q)\to\neg p$ (MT)	$(p\to q)\to((p\to\neg q)\to\neg p)$ (RL)

Implikationslagar, reflexivitet, transitivitet/hypotetisk syllogism, permutationslagen, självdistribution	
$p\to p$	$(p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$
$(p\to q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$	$(q\to r)\to((p\to q)\to(p\to r))$
$(p\to q)\leftrightarrow\neg(p\wedge\neg q)$	$(p\to(q\to r))\leftrightarrow(q\to(p\to r))$
$\neg(p\to q)\leftrightarrow(p\wedge\neg q)$	$(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$
$\neg(p\to\neg q)\leftrightarrow(p\wedge q)$	$(p\to(q\to r))\leftrightarrow((p\to q)\to(p\to r))$

Kontrapositionslagar	
$(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$	$(\neg p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to p)$
$(p\to\neg q)\leftrightarrow(q\to\neg p)$	$(\neg p\to\neg q)\leftrightarrow(q\to p)$

Ekvivalenslagar	
$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\leftrightarrow\neg q)$	$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(q\leftrightarrow p)$
$(\neg p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(p\leftrightarrow\neg q)$	$\neg(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q))$
$(p\leftrightarrow\neg q)\leftrightarrow(\neg p\leftrightarrow q)$	$(p\leftrightarrow(q\leftrightarrow r))\leftrightarrow((p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r)$
$\neg(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\leftrightarrow q)$	$(p\leftrightarrow q)\to((q\leftrightarrow r)\to(p\leftrightarrow r))$

[6] Lagarna har fått namn efter Augustus DeMorgan (1806–1871), men tycks ha varit kända åtminstone sedan medeltiden (Łukasiewicz (1935)).

$\neg(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(p\leftrightarrow\neg q)$	$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((p\leftrightarrow r)\rightarrow(q\leftrightarrow r))$
$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$	$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((p\leftrightarrow r)\leftrightarrow(q\leftrightarrow r))$
$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))$	$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((r\leftrightarrow p)\leftrightarrow(r\leftrightarrow q))$

Kongruenslagar

$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((p\wedge r)\leftrightarrow(q\wedge r))$	$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((p\rightarrow r)\leftrightarrow(q\rightarrow r))$
$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((p\vee r)\leftrightarrow(q\vee r))$	$(p\leftrightarrow q)\rightarrow((r\rightarrow p)\leftrightarrow(r\rightarrow q))$

Försvagning av eftersatsen, förstärkning av försatsen,
bejakande av eftersatsen, förnekande av eftersatsen, explosionslagen

$p\rightarrow(p\vee q)$	$(p\wedge q)\rightarrow p$	$p\rightarrow(q\rightarrow p)$
$q\rightarrow(p\vee q)$	$(p\wedge q)\rightarrow q$	$\neg p\rightarrow(p\rightarrow q)$
$(p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow(q\vee r))$	$(p\rightarrow r)\rightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$	$(p\wedge\neg p)\rightarrow q$

Disjunktiv syllogism, konjunktiv syllogism,
”Peirces lag”, implikationsparadoxen, dilemmatiska syllogismer

$((p\vee q)\wedge\neg p)\rightarrow q$	$((p\vee q)\wedge((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow r$
$((p\vee q)\wedge\neg q)\rightarrow p$	$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r))\rightarrow\neg(p\wedge q)$
$(\neg(p\wedge q)\wedge p)\rightarrow\neg q$	$((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r))\rightarrow((\neg q\vee\neg r)\rightarrow\neg p)$
$(\neg(p\wedge q)\wedge q)\rightarrow\neg p$	$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((p\vee q)\rightarrow(r\vee s))$
$((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p$	$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((\neg r\vee\neg s)\rightarrow(\neg p\vee\neg q))$
$(p\rightarrow q)\vee(q\rightarrow p)$	$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow(\neg(r\wedge s)\rightarrow\neg(p\wedge q))$

Några satslogiska sanningar som innehåller $\veebar$ (NOR)

$(p\veebar q)\rightarrow\neg p$, $(p\veebar q)\rightarrow\neg q$, $(p\veebar p)\rightarrow\neg p$, $\neg p\rightarrow(p\veebar p)$,
$((p\rightarrow q)\wedge(q\veebar q))\rightarrow(p\veebar p)$, $((p\rightarrow q)\wedge(q\veebar q))\rightarrow\neg p$,
$(\neg p\wedge(q\veebar r))\rightarrow((p\veebar q)\wedge(p\veebar r))$, $((p\veebar q)\wedge(r\veebar s))\rightarrow((p\veebar r)\wedge(q\veebar s))$,
$((p\rightarrow q)\wedge(q\veebar r))\rightarrow(p\veebar r)$, $((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((r\veebar s)\rightarrow(p\veebar q))$.

Några satslogiska sanningar som innehåller $\triangle$ (NAND)

$(p\triangle p)\rightarrow\neg p$, $\neg p\rightarrow(p\triangle p)$, $((p\triangle q)\wedge p)\rightarrow\neg q$, $((p\triangle q)\wedge q)\rightarrow\neg p$,
$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\triangle\neg q)$, $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\triangle\neg q)\wedge(q\triangle\neg p))$, $((p\rightarrow q)\wedge(q\triangle r))\rightarrow(p\triangle r)$,
$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((r\triangle s)\rightarrow(p\triangle q))$, $((p\triangle r)\wedge(q\triangle\neg r))\rightarrow(p\triangle q)$,
$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r))\rightarrow(p\triangle q)$, $((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow\neg q))\rightarrow(p\triangle p)$,
$((p\rightarrow q)\wedge(q\triangle q))\rightarrow(p\triangle p)$, $(p\wedge(q\triangle q))\rightarrow\neg(p\rightarrow q)$,
$((p\rightarrow q)\wedge(p\triangle q))\rightarrow(p\triangle p)$, $(p\wedge(p\triangle q))\rightarrow\neg(p\rightarrow q)$.

Några satslogiska sanningar som innehåller $\underline{\leftrightarrow}$ (XOR)

$(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow\neg(p\leftrightarrow q)$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\rightarrow(p\vee q)$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\rightarrow\neg(p\wedge q)$,
$(p\underline{\leftrightarrow}q)\rightarrow(p\vartriangle q)$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\rightarrow(p\rightarrow\neg q)$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\rightarrow(q\rightarrow\neg p)$,
$((p\underline{\leftrightarrow}q)\wedge p)\rightarrow\neg q$, $((p\underline{\leftrightarrow}q)\wedge q)\rightarrow\neg p$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow(\neg p\underline{\leftrightarrow}\neg q)$,
$(\neg p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow(p\underline{\leftrightarrow}\neg q)$, $(p\underline{\leftrightarrow}\neg q)\leftrightarrow(\neg p\underline{\leftrightarrow}q)$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow(\neg p\leftrightarrow q)$,
$(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow(p\leftrightarrow\neg q)$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow((p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q))$,
$(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vartriangle q))$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow\neg((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$,
$(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow(\neg(p\rightarrow q)\vee\neg(q\rightarrow p))$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow((p\underline{\rightarrow}q)\vee(q\underline{\rightarrow}p))$,
$(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow((p\underline{\rightarrow}q)\vee(p\underline{\leftarrow}q))$, $(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q))$,
$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow((p\underline{\leftrightarrow}q)\rightarrow r)$, $((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r))\rightarrow((\neg q\underline{\leftrightarrow}\neg r)\rightarrow\neg p)$,
$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((p\underline{\leftrightarrow}q)\rightarrow(r\vee s))$, $((p\rightarrow q)\wedge(q\underline{\leftrightarrow}r))\rightarrow(p\vartriangle r)$,
$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((r\underline{\leftrightarrow}s)\rightarrow(p\vartriangle q))$, $((p\underline{\leftrightarrow}r)\wedge(q\underline{\leftrightarrow}\neg r))\rightarrow(p\underline{\leftrightarrow}q)$,
$((p\underline{\leftrightarrow}r)\wedge(p\underline{\leftrightarrow}\neg r))\rightarrow\neg p$, $((p\vee q)\wedge((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r))\rightarrow(p\underline{\leftrightarrow}q)$,
$((p\vee q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((r\underline{\leftrightarrow}s)\rightarrow(p\underline{\leftrightarrow}q))$, $(p\underline{\leftrightarrow}p)\leftrightarrow\underline{T}$,
$(p\wedge(q\underline{\leftrightarrow}r))\leftrightarrow((p\wedge q)\underline{\leftrightarrow}(p\wedge r))$, $(q\leftrightarrow(p\underline{\leftrightarrow}r))\rightarrow((p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow r)$,
$((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r))\rightarrow((\neg q\underline{\leftrightarrow}\neg r)\rightarrow\neg p)$,
$((p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\rightarrow((\neg r\underline{\leftrightarrow}\neg s)\rightarrow(p\vartriangle q))$.

DeMorgan liknande lagar

$(p\vartriangle q)\leftrightarrow\neg(\neg p\underline{\vee}\neg q)$	$\neg(p\vartriangle q)\leftrightarrow(\neg p\underline{\vee}\neg q)$
$(p\underline{\vee}q)\leftrightarrow\neg(\neg p\vartriangle\neg q)$	$\neg(p\underline{\vee}q)\leftrightarrow(\neg p\vartriangle\neg q)$
$(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow\neg(\neg p\leftrightarrow\neg q)$	$\neg(p\underline{\leftrightarrow}q)\leftrightarrow(\neg p\leftrightarrow\neg q)$
$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow\neg(\neg p\underline{\leftrightarrow}\neg q)$	$\neg(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\underline{\leftrightarrow}\neg q)$

Några övriga satslogiska sanningar

$(p\vee q)\leftrightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow q)$, $(p\wedge q)\leftrightarrow(p\underline{\rightarrow}(p\underline{\rightarrow}q))$, $(p\underline{\rightarrow}q)\leftrightarrow\neg(p\rightarrow q)$,
$(p\underline{\rightarrow}q)\leftrightarrow(p\wedge\neg q)$, $(p\underline{\leftarrow}q)\leftrightarrow\neg(p\leftarrow q)$, $(p\underline{\leftarrow}q)\leftrightarrow(\neg p\wedge q)$, $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(q\leftarrow p)$,
$(p\leftarrow q)\leftrightarrow(q\rightarrow p)$, $(p<q)\leftrightarrow p$, $(p<q)\leftrightarrow(p\wedge(q\vee\neg q))$, $(p<q)\leftrightarrow(p\wedge(q\rightarrow p))$,
$(p>q)\leftrightarrow q$, $(p>q)\leftrightarrow((p\vee\neg p)\wedge q)$, $(p>q)\leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge q)$, $(p\leq q)\leftrightarrow\neg(p<q)$,
$(p\leq q)\leftrightarrow\neg p$, $(p\geq q)\leftrightarrow\neg(p>q)$, $(p\geq q)\leftrightarrow\neg q$.

6. Några metalogiska teorem

I det här avsnittet skall jag nämna några intressanta metalogiska teorem som gäller för satslogiken. Men jag kommer inte att gå igenom några bevis. En del resultat följer mer eller mindre omedelbart ur våra definitioner av grundläggande begrepp. En del kräver något längre bevis. Exakt hur de olika teoremen bevisas beror på vilken bevisteori vi använder. Beviset för att en viss axiomatisering av satslogiken är sund och fullständig ser givetvis annorlunda ut än beviset för att ett visst satslogiskt tablåsystem är sunt och fullständigt.[7] Jag använder följande symboler i det här avsnittet:

A, B: Satser.
Γ, Δ: Mängder av satser.
"$\varnothing$" står för den tomma mängden; "$\cup$" för union.
S: Ett satslogiskt system (i regel sunt och fullständigt).
$B \in \Gamma$: B är ett element i Γ.
$\Gamma \vdash_S A$: A är härledbar ur Γ i S.
$\vdash_S B$: B är ett teorem i S (B är bevisbar i S).
$Cons_S\ \Gamma$: Γ är konsistent i S.
$InCons_S\ \Gamma$: Γ är inkonsistent i S.
$\Gamma \Vdash B$: B följer (sats)logiskt ur Γ.
$\Vdash B$: B är (sats)logiskt sann (en tautologi).
Sat Γ: Γ är satisfierbar.

6.1. Sundhet och fullständighet

Vanligtvis vill vi att våra logiska system skall vara sunda och fullständiga. Sundhet tycks vara ett minimikrav på ett tillfredsställande system. Om ett system inte är sunt, kan vi bevisa för mycket i detta system: då kan vi bevisa satser som inte är logiskt sanna. Helst vill vi också att våra system skall vara fullständiga. Men detta tycks inte vara ett absolut krav. Om ett system inte är fullständigt, så är det för svagt: då kan vi inte bevisa alla satser som är logiskt sanna i detta system. Här följer definitioner av "sundhet" och "fullständighet".

Svag sundhet. Ett system S är svagt sunt omm $\vdash_S B$ medför $\Vdash B$, dvs. omm alla satser som kan bevisas i systemet är (sats)logiskt sanna.

Svag fullständighet. Ett system S är svagt fullständigt omm $\Vdash B$ medför $\vdash_S B$, dvs. omm alla satser som är (sats)logiskt sanna kan bevisas i S.

Stark sundhet. Ett system S är starkt sunt omm $\Gamma \vdash_S B$ medför $\Gamma \Vdash B$, dvs. omm alla satser B som kan härledas ur Γ i S följer (sats)logiskt ur Γ.

[7] Vissa grundläggande metateorem och bevis kan man hitta i olika introduktioner till logiken, t.ex. i Barwise (1977b), Buss (1998b), Epstein (2006), Hunter (1971), Kleene (1952), Mendelson (1964), och Hodges (2001). För mer information om semantiska tablåer och metalogik, se referenserna i Avsnitt 4.2. Se också relevanta anvisningar i introduktionen.

Stark fullständighet. Ett system S är starkt fullständigt omm $\Gamma \Vdash B$ medför $\Gamma \vdash_S B$, dvs. omm alla satser B som följer (sats)logiskt ur Γ kan härledas ur Γ i S.

Om ett system är starkt sunt, så är det också svagt sunt. Om ett system är starkt fullständigt, så är det också svagt fullständigt.

Exempel. Som jag nämnde i Avsnitt 4.4 är många men inte alla system sunda och fullständiga. S$\{\neg\neg, \wedge, \neg\wedge, \vee, \neg\vee, \rightarrow, \neg\rightarrow, \leftrightarrow, \neg\leftrightarrow\}$ är ett exempel på ett system som är (starkt) sunt och (starkt) fullständigt. Alla axiomatiseringar som nämns i Appendixet är sunda och fullständiga. ■

6.2. Härledbarhet

Nedan följer några metateorem som handlar om härledbarhet.

Om $\Gamma \vdash_S B$ och $\Gamma \subseteq \Delta$, så $\Delta \vdash_S B$. Om en sats B är härledbar ur en mängd satser Γ i S och Γ är en delmängd av en mängd satser Δ, så är B härledbar ur Δ i S. Pga. denna egenskap brukar man säga att satslogiken är monoton.

$\Gamma \vdash_S B$ omm det finns en ändlig delmängd $\{A_1, \ldots, A_n\}$ av Γ sådan att $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash_S B$. En sats B är härledbar ur en mängd satser Γ i S omm det finns en ändlig delmängd satser $\{A_1, \ldots, A_n\}$ av Γ sådan att B är härledbar ur $\{A_1, \ldots, A_n\}$ i S.

Om $B \in \Gamma$, så $\Gamma \vdash_S B$. Om en sats B är ett element i en mängd satser Γ, så är B härledbar ur Γ i S.

$\vdash_S B$ omm $\varnothing \vdash_S B$. En sats B är ett teorem i S omm B är härledbar ur den tomma mängden i S.

$\vdash_S B$ omm det för varje Γ, $\Gamma \vdash_S B$. En sats B är ett teorem i S omm B är härledbar ur vilken mängd satser Γ som helst i S.

Om $\Gamma \cup \{A\} \vdash_S B$, så $\Gamma \vdash_S A \rightarrow B$. Om B är härledbar ur unionen av Γ och $\{A\}$ i S, så är $A \rightarrow B$ härledbar ur Γ i S.

Om $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash_S B$, så $\vdash_S (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$. Om B är härledbar ur $\{A_1, \ldots, A_n\}$ i S, så är $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ ett teorem i S.

Om $\Gamma \vdash_S A \rightarrow B$, så $\Gamma \cup \{A\} \vdash_S B$. Om $A \rightarrow B$ är härledbar ur Γ i S, så är B härledbar ur unionen av Γ och $\{A\}$ i S.

Om $\vdash_S (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$, så $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash_S B$. Om $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ är ett teorem i S, så är B härledbar ur $\{A_1, \ldots, A_n\}$ i S.

$\Gamma \vdash_S B$ omm det finns en ändlig delmängd $\{A_1, \ldots, A_n\}$ av Γ sådan att $\vdash_S (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$. B är härledbar ur Γ i S om och endast om det finns en ändlig delmängd $\{A_1, \ldots, A_n\}$ av Γ sådan att $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ är ett teorem i S.

6.3. Logisk följd
Här följer några metateorem som handlar om logisk följd.

Om $B \in \Gamma$, så $\Gamma \Vdash B$. Om B är ett element i Γ, så följer B ur Γ.

$\Vdash B$ omm $\varnothing \Vdash B$. B är logiskt sann om och endast om B följer ur den tomma mängden.

$\Vdash B$ omm för varje Γ, $\Gamma \Vdash B$. B är logiskt sann om och endast om B följer ur vilken mängd satser som helst.

$\{A\} \Vdash B$ omm $\Vdash A \rightarrow B$. $\{A\}$ medför B om och endast om $A \rightarrow B$ är logiskt sann.

$\{A_1, \ldots, A_n\} \Vdash B$ omm $\{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\} \Vdash B$. $\{A_1, \ldots, A_n\}$ medför B om och endast om $\{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\}$ medför B.

$\{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\} \Vdash B$ omm $\Vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$. $\{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\}$ medför B om och endast om $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ är logiskt sann.

$\{A_1, \ldots, A_n\} \Vdash B$ omm $\Vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$. $\{A_1, \ldots, A_n\}$ medför B om och endast om $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ är logiskt sann.

$\{A_1, \ldots, A_n\} \Vdash B$ omm $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \Vdash A_n \rightarrow B$. $\{A_1, \ldots, A_n\}$ medför B om och endast om $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ medför $A_n \rightarrow B$.

$\{A_1, \ldots, A_n\} \Vdash B$ omm $\Vdash A_1 \rightarrow (\ldots(A_n \rightarrow B)\ldots)$. $\{A_1, \ldots, A_n\}$ medför B om och endast om $A_1 \rightarrow (\ldots(A_n \rightarrow B)\ldots)$ är logiskt sann.

6.4. Konsistens och inkonsistens
Följande metateorem handlar om konsistens och inkonsistens.

$\mathrm{InCon}_S\ \Gamma$ omm $\Gamma \vdash_S \perp$. Γ är inkonsistent i S om och endast om Falsum är härledbar ur Γ i S.

$\mathrm{InCon}_S\ \Gamma$ omm det finns en ändlig delmängd Δ av Γ sådan att $\Delta \vdash_S \perp$. Γ är inkonsistent i S om och endast om det finns en ändlig delmängd Δ av Γ sådan att Falsum är härledbar ur Δ i S.

$\mathrm{InCon}_S\ \Gamma$ omm det finns en ändlig delmängd $\{A_1, \ldots, A_n\}$ av Γ sådan att $\vdash_S \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$. Γ är inkonsistent i S om och endast om det finns en ändlig delmängd $\{A_1, \ldots, A_n\}$ av Γ sådan att negationen av $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ är ett teorem i S.

$\mathrm{InCon}_S\ \Gamma$ omm $\Gamma \vdash_S A$ för varje A. Γ är inkonsistent i S om och endast om vilken sats som helst är härledbar ur Γ i S.

$\mathrm{Con}_S\ \Gamma$ omm inte $\Gamma \vdash_S A$ för varje A. Γ är konsistent i S om och endast om det inte är fallet att vilken sats som helst är härledbar ur Γ i S.

$\mathrm{Con}_S\ \Gamma$ omm det inte finns något A sådant att både $\Gamma \vdash_S A$ och $\Gamma \vdash_S \neg A$. Γ är konsistent i S om och endast om det inte finns någon sats A sådan att både A och negationen av A är härledbara ur Γ i S.

$\text{InCon}_S\ \Gamma$ omm det finns något A sådant att både $\Gamma \vdash_S A$ och $\Gamma \vdash_S \neg A$. Γ är inkonsistent i S om och endast om det finns en sats A sådan att både A och negationen av A är härledbara ur Γ i S.

$\Gamma \vdash_S A$ omm $\text{InCon}_S\ \Gamma \cup \{\neg A\}$. A är härledbar ur Γ i S om och endast om unionen av Γ och {¬A} är inkonsistent i S.

$\Gamma \vdash_S \neg A$ omm $\text{InCon}_S\ \Gamma \cup \{A\}$. Negationen av A är härledbar ur Γ i S om och endast om unionen av Γ och {A} är inkonsistent i S.

$\text{Con}_S\ \Gamma \cup \{\neg A\}$ omm inte $\Gamma \vdash_S A$. Unionen av Γ och {¬A} är konsistent om och endast om det inte är fallet att A är härledbar ur Γ i S.

$\text{Con}_S\ \Gamma$ omm för varje ändlig delmängd Δ av Γ, $\text{Con}_S\ \Delta$. Γ är konsistent i S om och endast om varje ändlig delmängd av Γ är konsistent i S.

$\text{InCon}_S\ \Gamma$ omm det finns en ändlig delmängd Δ av Γ, $\text{InCon}_S\ \Delta$. Γ är inkonsistent i S om och endast om någon ändlig delmängd av Γ är inkonsistent i S.

6.5. Satisfierbarhet

Låt oss slutligen nämna några metateorem som handlar om satisfierbarhet.

Sat Γ omm inte $\Gamma \Vdash \underline{\top}$. En mängd satser Γ är satisfierbar om och endast om det inte är fallet att Falsum följer ur Γ.

Sat $\Gamma \cup \{\neg A\}$ omm inte $\Gamma \Vdash A$. Unionen av Γ och {¬A} är satisfierbar om och endast om det inte är fallet att A följer ur Γ.

$\Gamma \Vdash A$ omm inte Sat $\Gamma \cup \{\neg A\}$. A följer ur Γ om och endast om det inte är fallet att unionen av Γ och {¬A} är satisfierbar.

Sat Γ omm det inte finns något A sådant att både $\Gamma \Vdash A$ och $\Gamma \Vdash \neg A$. Γ är satisfierbar om och endast om det inte finns någon sats A sådan att både A och inte-A följer ur Γ.

Appendix

Det här Appendixet innehåller tre möjliga axiomatiseringar av satslogiken. Alla dessa är sunda och fullständiga.

SL_1 (efter Frege (1879))

Axiom

(A1) $p \to (q \to p)$, (A2) $(r \to (q \to p)) \to ((r \to q) \to (r \to p))$, (A3) $(r \to (q \to p)) \to (q \to (r \to p))$, (A4) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$, (A5) $\neg\neg p \to p$, och (A6) $p \to \neg\neg p$.

Slutledningsregler
Modus Ponens (Om A är ett element i $\mathbf{SL_1}$ och $A \rightarrow B$ är ett element i $\mathbf{SL_1}$, så är också B det).
Substitutionsregeln (se Avsnitt 4.1).

$\mathbf{SL_2}$ (efter Whitehead och Russell (1910))
Axiom
(A1) $(p \vee p) \rightarrow p$, (A2) $q \rightarrow (p \vee q)$, (A3) $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$, och (A4) $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$.

Slutledningsregler
Modus Ponens och Substitutionsregeln.

$\mathbf{SL_2}$ är väsentligen den version av satslogiken som utvecklas i Principia Mathematica (se Whitehead & Russell (1910), ss. 12–14 och 91–97). Whitehead och Russell inkluderar axiomet $(p \vee (q \vee r)) \rightarrow (q \vee (p \vee r))$ i sitt system. Men Paul Bernays har visat att denna sats är redundant i ljuset av övriga axiom (Bernays (1926)).

$\mathbf{SL_3}$ (efter Church (1956), ss. 119–120)
Axiom
(A1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$, (A2) $(s \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((s \rightarrow p) \rightarrow (s \rightarrow q))$, och (A3) $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$.

Slutledningsregler
Modus Ponens och Substitutionsregeln.

Kommentar. Såvitt jag vet har Figur 1–3 i den här uppsatsen inte publicerats tidigare. Sambanden som uttrycks i Figur 1 har emellertid uppmärksammats bl.a. av en forskare vid namn David Miller. Figur 2 och 3 är såvitt jag vet helt nya.

Referenser

Anderson, A. R. & Johnstone, H. W. (1962). *Natural Deduction: The Logical Basis of Axiom Systems*. Belmont, California: Wadsworth Publishing Company.

Anderson, D. & Zalta, E. (2004). Frege, Boolos, and logical objects. *Journal of Philosophical Logic*, 33, ss. 1–26.

Barwise, J. (red.). (1977). *Handbook of Mathematical Logic*. Amsterdam: Elsevier.

Barwise, J. (1977b). An Introduction to First-Order Logic. I *Barwise* (red.) (1977), ss. 5–46.

Bernays, P (1926). Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der "Principia Mathematica". *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 25, Nr. 1, ss. 305–320.

Beth, E. W. (1955). Semantic Entailment and Formal Derivability. Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afdeling Letterkunde, N.S., Vol. 18, nr. 13. Amsterdam: 309–42. Tryckt på nytt i *Hintikka* (1969), ss. 9–41.

Beth, E. W. (1959). *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam.

Biggs, N. L. (2002). *Discrete Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Bimbó, K. (2010). Schönfinkel-type Operators for Classical Logic. *Studia Logica*, Vol. 95, Nr. 3, ss. 355–378.

Bonevac, D. (2003). *Deduction: Introductory Symbolic Logic*. Oxford: Blackwell Publishing.

Bostock, D. (1997). *Intermediate Logic*. Oxford: Oxford University Press.

Buss, S. (red.). (1998). *Handbook of Proof Theory*. University of California, San Diego, Elsevier.

Buss, S. (1998b). An Introduction to Proof Theory. I *S. Buss* (1998), ss. 1–78.

Church, A. (1956). *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, tenth printing 1996.

Copi, I. M. & Cohen, C. (2002). *Introduction to Logic*. New Jersey: Prentice Hall. 11th edition.

D'Agostino, M. (1999). Tableau Methods for Classical Propositional Logic. I *D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle, R. & Posegga, J.* (red.). (1999), ss. 45–123.

D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle, R. & Posegga, J. (red.). (1999). *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Enderton, H. B. (2001). *A Mathematical Introduction to Logic*. University of California, Los Angeles, Harcourt/Academic Press.

Epstein, R. L. (2006). *Classical Mathematical Logic: The Semantic Foundations of Logic*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Fitting, M. (1999). Introduction. I *M. D'Agostino, D. M. Gabbay, R. Hähnle & J. Posegga* (red.). (1999), ss. 1–43.

Frege, G. F. L. (1879). *Begriffsschrift*. Halle: Verlag von Louis Nebert.

Frege, G. F. L. (1995). *Skrifter i Urval*. Stockholm: Thales.

Gabbay, D. M. & Guenthner, F. (red.). (2001). *Handbook of Philosophical Logic*. 2nd Edition. Vol. 2. Dordecht: Kluwer Academic Publishers.

Gabriel, G. (1984). Fregean Connection: Bedeutung, Value and Truth-Value. *The Philosophical Quarterly*. Vol. 34, Nr. 136, Special Issue: Frege, ss. 372–376.

Gentzen, G. (1935a). Untersuchungen über das Logische Schliessen I. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 176–210. Engelsk översättning, Investigations into Logical Deduction, i Szabo (1969).

Gentzen, G. (1935b). Untersuchungen über das Logische Schliessen II. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 405–431. Engelsk översättning, Investigations into Logical Deduction, i Szabo (1969).

Haack, S. (1974). *Deviant Logic, Fuzzy Logic*. Chicago and London: The University of Chicago Press.

Hintikka, J. (1955). Form and Content in Quantification Theory. *Acta Philosophica Fennica* 8, ss. 8–55.

Hodges, W. (2001). Elementary Predicate Logic. I D. M. Gabbay & F. Guenthner, (red.). (2001). *Handbook of Philosophical Logic*. 2nd Edition. Vol. 1, Dordecht: Kluwer Academic Publishers, ss. 1–129.

Hintikka, J. (1969). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford Readings in Philosophy. Oxford: Oxford University Press.

Hunter, G. (1971). *Metalogic: An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic*. California: University of California Press.

Hähnle, R. (2001). Advanced Many-valued Logics. I *D. M. Gabbay & F. Guenthner* (red.) (2001), ss. 297–395.

Jeffrey, R. C. (1967). *Formal Logic: Its Scope and Limits*. McGraw-Hill, New York.

Kirkham, R. L. (1992). *Theories of Truth: A Critical Introduction*. Cambridge Massachusetts.

Kleene, S. C. (1952). *Introduction to Metamathematics*. Princeton: Van-Nostrand.

Künne, W. (2003). *Conceptions of Truth*. Oxford: Clarendon Press.

Layman, S. C. (2002). *The Power of Logic*. McGraw-Hill.

Lepore, E. (2000). *Meaning and Argument: An Introduction to Logic Through Language*. Blackwell Publishing, Revised Edition 2003.

Lis, Z. (1960). Wynikanie Semantyczne a Wynikanie Formalne (Logical Consequence, Semantic and Formal). *Studia Logica*, Vol. 10, ss. 39–60.

Łukasiewicz, J. (1935). Zur Geschichte der Aussagenlogik. *Erkenntnis*, Vol. 5, ss. 111–131.

Nicod, J. (1917–20). A reduction in the number of primitive propositions of logic. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 19, ss. 32–44.

Mendelson, E. (1964). *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman & Hall, fourth edition, 1997.

Mårtensson, B. (1993). *Logik: En Introduktion*. Lund: Studentlitteratur.

Pelletier, F. J., och Norman M. M. (1990). 'Post's functional completeness theorem'. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 31, ss. 462–475.

Post, E. L. (1921). Introduction to a general theory of elementary propositions. *American Journal of Mathematics*, Vol. 43, ss. 163–185.

Prawitz, D. (1991). *ABC i Symbolisk Logik: Logikens Språk och Grundbegrepp*. Stockholm: Thales.

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Prior, A. N. (1955). *Formal Logic*. Oxford: Oxford University Press.

Quine, W. V. (1950). *Methods of Logic*. Cambridge Mass: Harvard University Press. Fourth Edition, 1982.

Rönnedal, D. (2012). *Extensions of Deontic Logic: An Investigation into some Multi-Modal Systems*. Department of Philosophy, Stockholm University.

Schönfinkel, M. (1924/1967). 'On the building blocks of mathematical logic', in J. van Heijenoort, (red.), From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, Harvard University Press, Cambridge, MA, ss. 355–366.

Sheffer, H. M. (1913). A set of five independent postulates for Boolean algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 14, ss. 481–488.

Shramko, Y. & Wansing, H. (red.). (2009). Truth Values, Part I. Special issue of *Studia logica*, Vol. 91, Nr. 3.

Shramko, Y. & Wansing, H. (red.). (2009b). Truth Values, Part II. Special issue of *Studia logica*, Vol. 92, Nr. 2.

Smullyan, R. M. (1963). A unifying Principle in Quantificational Theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 49, 6, ss. 828–832.

Smullyan, R. M. (1965). Analytic Natural Deduction. *Journal of Symbolic Logic* 30, ss. 123–139.

Smullyan, R. M. (1966). Trees and Nest Structures. *Journal of Symbolic Logic* 31, ss. 303–321.

Smullyan, R. M. (1968). *First-Order Logic*. Heidelberg: Springer-Verlag.

Sundholm, G. (2001). Systems of Deduction. I *D. M. Gabbay & F. Guenthner* (red.) (2001), ss. 1–52.

Szabo, M. E. (red.) (1969). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland, Amsterdam.

Thomason, R. (1970). *Symbolic Logic: An Introduction*. New York: Macmillan Publishing.

Urquhart, A. (2001). Basic Many-valued Logic. I *D. M. Gabbay & F. Guenthner* (red.) (2001), ss. 249–295.

Wernick, W. (1942). Complete Sets of Logical Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 51, Nr. 1, ss. 117–132.

Whitehead, A. N. & Russell, B. (1910). *Principia Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press. Tre Vol. Second Ed. 1925, reprinted 1950.

Wittgenstein, L. (1921). *Tractatus Logico-Philosophicus*. Översättning till svenska av Anders Wedberg, Thales.

Żyliński, E. (1925). Some remarks concerning the theory of deduction. *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 7, ss. 203–209.

Daniel Rönnedal
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
daniel.ronnedal@philosophy.su.se