Bimodal Tidslogik med Monotemporala Ramar

Daniel Rönnedal

Abstrakt

Tidslogik är en gren av logiken som handlar om temporala begrepp, satser, argument och system. Inom denna gren av logiken undersöker man t.ex. uttryck såsom ”Det kommer alltid vara fallet att”, ”Det kommer någon gång i framtiden vara fallet att”, ”Det har alltid varit fallet att”, ”Det var någon gång i det förflutna fallet att”. Logiska relationer mellan satser som innehåller temporala begrepp studeras och giltigheten hos argument som består av sådana satser analyseras. I tidigare arbeten har jag diskuterat hur tidslogiken kan betraktas som en form av multimodal logik. I den här uppsatsen visar jag hur tidslogiken kan beskrivas som en bimodal logik, ett slags modallogik som endast innehåller *två* typer av temporala operatorer. Den semantik jag använder är baserad på monotemporala ramar. En monotemporal ram är en relationell struktur som endast innehåller *en* primitiv tillgänglighetsrelation, nämligen relationen *tidigare än* / *senare än*. Jag utvecklar ett antal så kallade semantiska tablåsystem och bevisar att dessa är sunda och fullständiga i relation till deras semantik.

1. Introduktion

Tidslogik är en gren av logiken som handlar om temporala begrepp, satser, argument och system. Inom denna gren av logiken undersöker man t.ex. uttryck såsom ”Det kommer alltid vara fallet att”, ”Det kommer någon gång i framtiden vara fallet att”, ”Det har alltid varit fallet att”, ”Det var någon gång i det förflutna fallet att”. Logiska relationer mellan satser som innehåller temporala begrepp studeras och giltigheten hos argument som består av sådana satser analyseras. I tidigare arbeten har jag diskuterat hur tidslogiken kan betraktas som en form av multimodal logik (Rönnedal (2014)). I den här uppsatsen visar jag hur tidslogiken kan beskrivas som en bimodal logik, ett slags modallogik som endast innehåller *två* typer av temporala operatorer. Den semantik jag använder är baserad på monotemporala ramar. En monotemporal ram är en relationell struktur som endast innehåller *en* primitiv tillgänglighetsrelation, nämligen relationen *tidigare än* / *senare än*. Jag

Filosofiska Notiser, Årgång 2, Nr. 2, September 2015, 53-76

utvecklar ett antal så kallade semantiska tablåsystem och bevisar att dessa är sunda och fullständiga i relation till deras semantik.[1]

Uppsatsen är indelad i fem avsnitt. Avsnitt 2 handlar om syntax. I avsnitt 3 går jag igenom den semantik som är gemensam för alla system, jag definierar ett antal grundläggande begrepp och undersöker några möjliga egenskaper hos tiden. Avsnitt 4 handlar om bevisteori. Jag beskriver ett antal tablåregler och visar hur dessa kan användas för att generera en mängd semantiska tablåsystem. Avsnitt 5 innehåller sundhets- och fullständighets-teorem.

2. Syntax

Språket TS2 består av följande alfabet och satser.

2.1. Alfabet

En mängd satsbokstäver p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2, …
De satslogiska konnektiven $\neg$ (negation), $\wedge$ (konjunktion),
$\vee$ (disjunktion), $\supset$ (materiell implikation) och $\equiv$ (materiell ekvivalens).
De temporala operatorerna G, F, H och P.
Parenteser) och (.

2.2. Satser

Språket TS2 består av alla satser (välformade formler) som genereras från följande villkor.

Varje satsbokstav är en (atomär) sats.
Om A och B är satser, så är $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ och $(A \equiv B)$ satser.
Om B är en sats, så är också $\neg B$, GB, FB, HB och PB satser.
Ingenting annat är en sats.

2.3 Definitioner

$[G]B = (B \wedge GB)$, $\langle F\rangle B = (B \vee FB)$, $[H]B = (B \wedge HB)$ och $\langle P\rangle B = (B \vee PA)$.

A, B, C, D… representerar godtyckliga satser i språket (inte nödvändigtvis atomära). Den grekiska bokstaven Σ står för en mängd satser och den tomma

[1] För mer information om tidslogik, se t.ex. Barringer, Fisher, Gabbay & Gough (2000), Burgess (1984), Finger, Gabbay & Reynolds (2002), Galton (1999), Goldblatt (1992), Kröger & Merz (2008), McArthur (1976), Needham (1975), Prior (1957), (1967), Rescher & Urquhart (1971), van Benthem (1983), Øhrstrøm & Hasle (1995).

mängden betecknas $\varnothing$. De satslogiska konnektiven är välkända från satslogiken. Parenteser runt välformade formler utelämnas i regel om ingen mångtydighet uppstår. Falsum kan introduceras genom en definition på vanligt vis. Övriga satser i språket läses på samma sätt som i Rönnedal (2014), nämligen på följande sätt.

GB: Det kommer alltid att vara fallet att B.
FB: Det kommer någon gång (i framtiden) vara fallet att B.
HB: Det har alltid varit fallet att B.
PB: Det har någon gång (i det förflutna) varit fallet att B.
[G]B: Det är och kommer alltid att vara fallet att B.
$\langle F \rangle$B: Det är eller kommer någon gång (i framtiden) vara fallet att B.
[H]B: Det är och har alltid varit fallet att B.
$\langle P \rangle$B: Det är eller har någon gång (i det förflutna) varit fallet att B.

3. Semantik

Tanken bakom den semantik som beskrivs i det här avsnittet är densamma som i Rönnedal (2014). Vi skall emellertid införa några nya begrepp.

3.1. Grundläggande termer

Ramar. I Rönnedal (2014) beskrev vi en temporal ram, F, som en relationell struktur $<T, <, >, \leq, \geq>$, där T är en icke-tom mängd av tidpunkter, och $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ är fyra dyadiska tillgänglighetsrelationer mellan tidpunkterna i T ($<$ är en delmängd av $T \times T$, etc.). Den intuitiva tolkningen av tillgänglighetsrelationerna är som följer.

$t_1 < t_2$: t_1 inträffar före/tidigare än t_2
$t_2 > t_1$: t_2 inträffar efter/senare än t_1
$t_1 \leq t_2$: t_1 inträffar samtidigt med eller före/tidigare än t_2
$t_2 \geq t_1$: t_2 inträffar samtidigt med eller efter/senare än t_1

Låt oss kalla en temporal ram av detta slag en *multi*-temporal ram. Vi kan emellertid också använda oss av *bi*-temporala och *mono*-temporala ramar. En bitemporal ram innehåller *två* (primitiva) tillgänglighetsrelationer (t.ex. $<$ och $>$), och en monotemporal ram innehåller *en* (primitiv) tillgänlighetsrelation (t.ex. $<$).

Givet vår informella läsning av de olika relationerna är det rimligt att anta att de kan definieras i termer av varandra. I en bitemporal ram som innehåller $<$ och $>$ som primitiva relationer kan t.ex. $\leq$ och $\geq$ definieras på följande sätt.

$$\forall t \forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$$
$$\forall t \forall t'(t \geq t' \equiv (t = t' \vee t > t'))$$

Dvs. t inträffar samtidigt med eller före t' om och endast om (omm) t är identisk med t' eller t inträffar före t'. Och t inträffar samtidigt med eller efter t' omm t är identisk med t' eller t inträffar efter t'. Dessa definitioner är rimliga om vi antar att det inte finns flera olika tidpunkter som inträffar samtidigt. Alternativt kan vi använda följande definitioner: $\forall t \forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t \forall t'(t' \geq t \equiv t \leq t')$; eller $\forall t \forall t'(t \geq t' \equiv (t = t' \vee t > t'))$ och $\forall t \forall t'(t' \geq t \equiv t \leq t')$.

I en monotemporal ram som innehåller $<$ som primitiv relation kan t.ex. övriga relationer definieras på följande sätt.

$$\forall t \forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$$
$$\forall t \forall t'(t' > t \equiv t < t')$$
$$\forall t \forall t'(t \geq t' \equiv (t = t' \vee t > t'))$$

Dvs. $\leq$ och $\geq$ definieras på samma sätt som i vårt bitemporala exempel, och $>$ definieras i termer av $<$. t' inträffar efter t omm t inträffar före t'. De här definitionerna är rimliga om vi antar att relationen *inträffar efter* är konversen till (eller konversen av) relationen *inträffar tidigare än*, och det inte finns flera olika tidpunkter som inträffar samtidigt. Här följer ett par alternativa definitioner: $\forall t \forall t'(t' > t \equiv t < t')$, $\forall t \forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t \forall t'(t' \geq t \equiv t \leq t')$; eller $\forall t \forall t'(t' > t \equiv t < t')$, $\forall t \forall t'(t \geq t' \equiv (t = t' \vee t > t'))$ och $\forall t \forall t'(t' \geq t \equiv t \leq t')$.

Om $>$ är konversen till $<$, så kan $t_1 < t_2$ (och även $t_2 > t_1$) läsas på två sätt: (i) t_1 inträffar före/tidigare än t_2, eller (ii) t_2 inträffar efter/senare än t_1. Båda är lika korrekta. På samma sätt gäller det att om $\geq$ är konversen till $\leq$, så kan $t_1 \leq t_2$ (och även $t_2 \geq t_1$) läsas på två sätt: (i) t_1 inträffar samtidigt med eller före/tidigare än t_2, eller (ii) t_2 inträffar samtidigt med eller efter/senare än t_1.

Semantiken för tidslogiken har ofta utvecklats med hjälp av monotemporala ramar. Vi skall i den här uppsatsen använda monotemporala ramar med formen $<T, <>$, där $<$ är den enda primitiva tillgänglighetsrelationen. Det här innebär att vi så att säga implicit gör vissa antaganden, t.ex. att $>$ är konversen till <. Det följer att bl.a. satserna A ⊃ HFA och A ⊃ GPA blir automatiskt giltiga. I bitemporala och multitemporala system måste vi inkludera vissa tablåregler för att kunna bevisa dessa (se avsnitt 4.3).

Modeller. Uttrycket ”temporal modell” definieras på samma sätt som i Rönnedal (2014), dvs. en temporal modell, M, är en struktur <F, V>, där F är en temporal ram och V är en värdering eller tolkningsfunktion, som tilldelar sanningsvärden T (sann) eller F (falsk) till varje satsbokstav vid varje tidpunkt i T.

I den här uppsatsen använder vi emellertid monotemporala ramar istället för multitemporala ramar, som vi redan har nämnt. Vi kan därför tala om en modell, M, direkt som en struktur <T, <, V>, där tillgänglighetsrelationen och T tolkas som i en monotemporal ram. ”**F**” representerar en klass av ramar, ”**M**” en klass av modeller.

3.2. Sanningsvillkor

$\Vdash_{M,\,t}$ B står för att B är sann vid tidpunkt t i modell M. Sanningsvillkoren för atomära satser och de satslogiska konnektiven är desamma som i Rönnedal (2014). Eftersom [G], ⟨F⟩, [H] och ⟨P⟩ är definierade i den här uppsatsen behöver vi inte ange några primitiva sanningsvillkor för satser där dessa operatorer har störst räckvidd. Här följer övriga villkor.

$\Vdash_{M,\,t}$ GB	omm	det för varje tidpunkt t′ i T sådan att $t < t'$ gäller att $\Vdash_{M,\,t'}$ B.
$\Vdash_{M,\,t}$ FB	omm	det finns någon tidpunkt t′ i T sådan att $t < t'$ och $\Vdash_{M,\,t'}$ B.
$\Vdash_{M,\,t}$ HB	omm	det för varje tidpunkt t′ i T sådan att $t' < t$ gäller att $\Vdash_{M,\,t'}$ B.
$\Vdash_{M,\,t}$ PB	omm	det finns någon tidpunkt t′ i T sådan att $t' < t$ och $\Vdash_{M,\,t'}$ B.

Notera att dessa sanningsvillkor är ekvivalenta med motsvarande villkor i Rönnedal (2014), givet att > definieras som konversen till <.

3.3. Övriga semantiska begrepp

Övriga semantiska begrepp, som satisfierbarhet, giltighet, logisk konsekvens osv. definieras precis som i Rönnedal (2014).

3.4. Villkor på temporala ramar

Vi skall nämna några olika villkor som kan användas för att karaktärisera olika temporala ramar. I Rönnedal (2014) delade vi in dessa villkor i två olika grupper. I den här uppsatsen behöver vi inte nämna den andra gruppen, som handlade om hur de olika tillgänglighetsrelationerna förhåller sig till varandra. För i den här uppsatsen studerar vi endast monotemporala ramar. Vi antar så att säga implicit att övriga temporala relationer kan definieras i termer av relationen *tidigare än* / *senare än* på så sätt som beskrevs ovan. Det här innebär bl.a. att $<$ är konversen till $>$ (och tvärt om), att $<$ är inkluderad i $\leq$, att $>$ är inkluderad i $\geq$, och att både $\leq$ och $\geq$ är reflexiva. Tabell 1 sammanfattar några möjliga egenskaper hos relationen *tidigare än* / *senare än*. I Rönnedal (2014) säger jag mer om innebörden av dessa villkor.

Villkor	Formalisering av villkor
	Reflexivitet
C-<T	$\forall t t < t$
	Ändlöshet bakåt
C-<PD	$\forall t \exists t' t' < t$
	Ändlöshet framåt
C-<FD	$\forall t \exists t' t < t'$
	Symmetri
C-<B	$\forall t \forall t'(t < t' \supset t' < t)$
	Transitivitet
C-<4	$\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t' < t'') \supset t < t'')$
	Täthet
C-<DE	$\forall t \forall t'(t < t' \supset \exists t''(t < t'' \wedge t'' < t'))$
	Gränser bakåt
C-<LB	$\forall t \forall t' \forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset \exists t'''(t''' < t' \wedge t''' < t''))$
	Gränser framåt
C-<UB	$\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset \exists t'''(t' < t''' \wedge t'' < t'''))$
	Jämförbarhet
C-<C	$\forall t \forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$
	Konvergens bakåt
C-<PC	$\forall t \forall t' \forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$
	Konvergens framåt
C-<FC	$\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$

Tabell 1

3.6. Klasser av ramar och deras logik

De villkor på ramar vi har tagit upp i avsnitt 3.4 kan användas för att tala om olika klasser av ramar på samma sätt som i Rönnedal (2014). **F**(C_1, …, C_n) är klassen av alla ramar som uppfyller villkoren C_1, …, C_n. Klassen av alla satser i TS2 som är giltiga i en klass av ramar **F**, S(**F**), kallas **F**'s logik eller det logiska systemet som är baserat på **F**. S(**F**) = {A ∈ TS2 : $\Vdash_{\mathbf{F}}$ A}. Genom att införa vissa villkor på våra ramar kan vi alltså, som vanligt, definiera en mängd logiska system. Dessa system är semantiskt karaktäriserade. I nästa sektion skall vi utveckla ett antal semantiska tablåsystem som svarar mot dessa.

4. Bevisteori

Vi skall nu undersöka ett antal semantiska tablåsystem som bl.a. kan användas för att avgöra om en sats är logiskt sann, logiskt falsk eller logiskt kontingent, om en mängd satser är konsistent eller inkonsistent och om ett argument är giltigt eller ogiltigt.[2]

Grundläggande begrepp, såsom träd, semantisk tablå, gren, öppen och sluten gren, teorem, bevis osv. definieras på vanligt sätt, se t.ex. Rönnedal (2012b), s. 131, eller Priest (2008). $\vdash_S$ B innebär att B är ett teorem i systemet S; och **Σ** $\vdash_S$ B innebär att B är härledbar från **Σ** i S.

Vi börjar med att gå igenom ett antal semantiska tablåregler. Därefter skall vi se hur dessa kan användas för att skapa en mängd semantiska tablåsystem. Slutligen nämner jag ett antal teorem som kan bevisas i våra system.

4.1. Tablåregler

Det finns tre olika typer av tablåregler: satslogiska regler, (grundläggande) temporala regler och (temporala) tillgänglighetsregler. De två första ingår i alla tablåsystem. Olika tablåsystem innehåller emellertid olika tillgänglighetsregler. Genom att lägga till tillgänglighetsregler kan vi skapa starkare system. Dessa regler svarar mot de semantiska villkor som vi diskuterade i sektion 3.4. Eftersom vi använder monotemporala ramar (och modeller) i den här uppsatsen behöver vi inte införa några tablåregler som svarar mot olika

[2] Evert Beth, se Beth (1955) och Beth (1959), ss. 186–201, 267–293, och 444–463, tycks ha varit den förste logiker som utvecklade ett semantiskt tablåsystem. Enligt Smullyan (1968) s. 3 kommer idén ursprungligen från Gerhard Gentzen (se Gentzen (1935) och Gentzen (1935b)). För mer information om semantiska tablåsystem, se t.ex. D'Agostino et al. (1999), Fitting & Mendelsohn (1998), Garson (2006), Jeffrey (1967), Priest (2008), Rönnedal (2012), (2012b) och Smullyan (1968).

relationer mellan olika tillgänglighetsrelationer på samma sätt som i Rönnedal (2014).

4.1.1. Satslogiska regler

Vi använder samma satslogiska regler som vanligt. (För mer information, se t.ex. Rönnedal (2012b), s. 132, eller nästan vilken introduktion till semantiska tablåer som helst, t.ex. Priest (2008)).

4.1.2. Grundläggande temporala regler

G	H	F	P
GA, i i < j ↓ A, j	HA, i j < i ↓ A, j	FA, i ↓ i < j A, j där j är ny	PA, i ↓ j < i A, j där j är ny
¬G	¬H	¬F	¬P
¬GA, i ↓ F¬A, i	¬HA, i ↓ P¬A, i	¬FA, i ↓ G¬A, i	¬PA, i ↓ H¬A, i

Tabell 2

Speciella regler för [G], [H], ⟨F⟩ och ⟨P⟩ behövs inte i systemen i den här uppsatsen, eftersom [G], [H], ⟨F⟩ och ⟨P⟩ introduceras genom definitioner i det språk vi använder här.

Id(I)	Id(II)	Id
A(i) i = j ↓ A(j)	A(i) j = i ↓ A(j)	…i… ↓ i = i

Tabell 3

De grundläggande identitetsreglerna är redundanta i system som inte innehåller några övriga ”identitetsregler” (regler som innehåller identitetstecknet).

4.1.3. Temporala tillgänglighetsregler

T-<PD	T-<FD	T-<T	T-<B	T-<4
...j...	...j…	…j…	i < j	i < j
↓	↓	↓	↓	j < k
k < j	j < k	j < j	j < i	↓
där k är ny	där k är ny			i < k

Tabell 4

Som vi noterade i Rönnedal (2014) är reglerna T-<T och T-<B inte särskilt plausibla rent intuitivt, eftersom de svarar mot villkoren att relationen *tidigare än* / *senare än* är reflexiv respektive symmetrisk. Anledningen till att jag har inkluderat dessa är att om tiden är cirkulär och transitiv, så följer det att den också är reflexiv och symmetrisk. Är tiden linjär, är de emellertid inte rimliga.

T-<DE	T-<LB	T-<UB
i < j	j < i	i < j
↓	k < i	i < k
i < k	↓	↓
k < j	l < j	j < l
där k är ny	l < k	k < l
	där l är ny	där l är ny

Tabell 5

T-<C	T-<PC	T-<FC
…i, j…	j < i	i < j
↙↓↘	k < i	i < k
i < j i = j j < i	↙↓↘	↙↓↘
	j < k j = k k < j	j < k j = k k < j

Tabell 6

4.2. Tablåsystem

Ett tablåsystem är en mängd tablåregler. Ett (normalt) temporalt tablåsystem inkluderar alla satslogiska regler och alla grundläggande temporala regler. Det minimala (normala) temporala tablåsystemet kallas ”T”. Genom att lägga till någon delmängd av de tillgänglighetsregler som introducerades i avsnitt 4.1.3 får vi en extension av T. Vi använder följande konventioner för att benämna olika system. ”$TT_1 \ldots T_n$”, där $T_1, \ldots, T_n$ är en lista (möjligtvis tom) på temporala tillgänglighetsregler, står för ett temporalt tablåsystem som innehåller tillgänglighetsreglerna T_1, …, och T_n. ”Redundanta” bokstäver i namnen utelämnas. T<4<PC (T4PC) är t.ex. ett namn på det temporala tablåsystem som innehåller tillgänglighetsreglerna T-<4 (4) och T-<PC (PC).

Om S är ett tablåsystem, så är S’s logik, eller den logik som är baserad på S, $L(S) = \{A \in TS2 : \vdash_S A\}$, dvs. mängden av alla satser i TS2 som kan bevisas i S. L(4PC) är t.ex. mängden av alla satser som kan bevisas i systemet T<4<PC (4PC), dvs. i det tablåsystem som innehåller alla grundläggande temporala regler och tillgänglighetsreglerna T-<4 (4) och T-<PC (PC).

4.3. Exempel på teorem

Det här avsnittet innehåller några teorem i olika temporala tablåsystem. Bevisen är ofta relativt enkla och i de flesta fall utelämnade. (Vill man lära sig att handskas med systemen i den här uppsatsen kan det vara en bra övning att bevisa alla satser i det här avsnittet.)

$GA \equiv \neg F\neg A$	$\neg GA \equiv F\neg A$	$G\neg A \equiv \neg FA$
$FA \equiv \neg G\neg A$	$\neg FA \equiv G\neg A$	$F\neg A \equiv \neg GA$
$[G]A \equiv \neg\langle F\rangle\neg A$	$\neg[G]A \equiv \langle F\rangle\neg A$	$[G]\neg A \equiv \neg\langle F\rangle A$
$\langle F\rangle A \equiv \neg[G]\neg A$	$\neg\langle F\rangle A \equiv [G]\neg A$	$\langle F\rangle\neg A \equiv \neg[G]A$
$HA \equiv \neg P\neg A$	$\neg HA \equiv P\neg A$	$H\neg A \equiv \neg PA$
$PA \equiv \neg H\neg A$	$\neg PA \equiv H\neg A$	$P\neg A \equiv \neg HA$
$[H]A \equiv \neg\langle P\rangle\neg A$	$\neg[H]A \equiv \langle P\rangle\neg A$	$[H]\neg A \equiv \neg\langle P\rangle A$
$\langle P\rangle A \equiv \neg[H]\neg A$	$\neg\langle P\rangle A \equiv [H]\neg A$	$\langle P\rangle\neg A \equiv \neg[H]A$

Tabell 7

Teorem 1. Alla satser i tabell 7 är teorem i alla system i den här uppsatsen.

Bevis. Enkelt! ■

I den här uppsatsen har vi introducerat [G], ⟨F⟩, [H] och ⟨P⟩ med hjälp av definitioner. Det innebär att det är sant per definition att $[G]B \equiv (B \wedge GB)$, $\langle F\rangle B \equiv (B \vee FB)$, $[H]B \equiv (B \wedge HB)$ och $\langle P\rangle B \equiv (B \vee PA)$. I de multimodala system som beskrivs i Rönnedal (2014) måste emellertid dessa ekvivalenser bevisas. Låt mig illustrera med ett exempel. Om ett multimodalt tablåsystem S innehåller T-≤T, T-<≤I och T-≤<I, så är $[H]A \equiv (A \wedge HA)$ ett teorem i S. Men $[H]A \equiv (A \wedge HA)$ är inte ett teorem i alla multimodala system. För att

visa $[H]A \supset (A \wedge HA)$ ”krävs” T-≤T och T-<≤I, och för att visa $(A \wedge HA) \supset [H]A$ ”krävs” T-≤<I. Om systemet innehåller T-≤T, så kan vi bevisa $[H]A \supset A$. Om systemet innehåller T-<≤I, så kan vi bevisa $[H]A \supset HA$. T-≤T svarar mot det semantiska villkoret att ≤ är reflexiv, T-<≤I mot det semantiska villkoret att < är inkluderad i ≤, och T-≤<I mot det semantiska villkoret att t inträffar samtidigt med eller tidigare än t′ omm t och t′ är identiska eller t inträffar tidigare än t′. Det här är villkor som vi ”implicit” antar att alla system i den här uppsatsen uppfyller. (Jag utelämnar i regel ”T-”, och ibland också ”<”, i namnet på alla tablåregler och använder ”Id” som en förkortning av alla ”identitetsregler” i bevisen nedan.)

$[H]A \supset (A \wedge HA)$

(1) $\neg([H]A \supset (A \wedge HA)), 0$

(2) $[H]A, 0$ [1, $\neg\supset$]

(3) $\neg(A \wedge HA), 0$ [1, $\neg\supset$]

↙ ↘

(4) $\neg A, 0$ [3, $\neg\wedge$]	(5) $\neg HA, 0$ [3, $\neg\wedge$]
(6) $0 \leq 0$ [1, ≤T]	(7) $P\neg A, 0$ [5, $\neg H$]
(8) $A, 0$ [2,6,[H]]	(9) $1 < 0$ [7, P]
(10) * [4, 8]	(11) $\neg A, 1$ [7, P]
	(12) $1 \leq 0$ [11, <≤I]
	(13) $A, 1$ [2, 12]
	(14) * [11, 13]

$(A \wedge HA) \supset [H]A$

(1) $\neg((A \wedge HA) \supset [H]A), 0$

(2) $A \wedge HA, 0$ [1, $\neg\supset$]

(3) $\neg[H]A, 0$ [1, $\neg\supset$]

(4) $A, 0$ [2, $\wedge$]

(5) $HA, 0$ [2, $\wedge$]

(6) $\langle P\rangle\neg A, 0$ [3, $\neg$[H]]

(7) $1 \leq 0$ [6, $\langle P\rangle$]

(8) $\neg A, 1$ [6, $\langle P\rangle$]

↙ ↘

(9) $1 = 0$ [7, ≤<I]	(10) $1 < 0$ [7, ≤<I]
(11) $A, 1$ [4, 9, Id]	(12) $A, 1$ [5,10,H]
(13) * [8, 11]	(14) * [8, 12]

Alla satser av följande form kan bevisas i alla tablåsystem i den här uppsatsen: $A \supset HFA$, $PGA \supset A$, $A \supset GPA$, $FHA \supset A$. Detta gäller dock inte i alla multimodala system som beskrivs i Rönnedal (2014). För att bevisa $A \supset HFA$, $PGA \supset A$ behöver vi T-<>C, och för att bevisa $A \supset GPA$, $FHA \supset A$ behöver vi T-><C. $A \supset HFA$, $PGA \supset A$ är därmed de satser som svarar mot det semantiska villkoret att om t inträffar tidigare än t′, så inträffar t′ senare än t; och $A \supset GPA$, $FHA \supset A$ är de satser som svarar mot det semantiska villkoret att om t′ inträffar senare än t, så inträffar t tidigare än t′. Tillsammans motsvarar satserna $A \supset HFA$, $PGA \supset A$, $A \supset GPA$, $FHA \supset A$ det semantiska villkoret att relationen *inträffar tidigare än* är konversen till relationen *inträffar senare än* (och vice versa). I axiomatiska beskrivningar av tidslogiken brukar man ofta anta $A \supset HFA$ och $A \supset GPA$ eller $PGA \supset A$ och $FHA \supset A$ som axiom.

$[H]A \supset A$, $[G]A \supset A$, $A \supset \langle P\rangle A$, $A \supset \langle F\rangle A$
$[H]A \supset \langle P\rangle A$, $\neg([H]A \wedge [H]\neg A)$, $[G]A \supset \langle F\rangle A$, $\neg([G]A \wedge [G]\neg A)$
$[H]A \supset HA$, $[G]A \supset GA$, $PA \supset \langle P\rangle A$, $FA \supset \langle F\rangle A$
$A \supset HFA$, $PGA \supset A$, $A \supset GPA$, $FHA \supset A$
$A \supset [H]\langle F\rangle A$, $\langle P\rangle[G]A \supset A$, $A \supset [G]\langle P\rangle A$, $\langle F\rangle[H]A \supset A$
$[H]HA \supset HA$, $H[H]A \supset HA$, $PA \supset \langle P\rangle PA$, $PA \supset P\langle P\rangle A$
$[G]GA \supset GA$, $G[G]A \supset GA$, $FA \supset \langle F\rangle FA$, $FA \supset F\langle F\rangle A$
$[H][H]A \supset [H]A$, $\langle P\rangle A \supset \langle P\rangle\langle P\rangle A$, $[G][G]A \supset [G]A$, $\langle F\rangle A \supset \langle F\rangle\langle F\rangle A$
$[G]GA \supset G[G]A$, $F\langle F\rangle A \supset \langle F\rangle FA$, $[H]HA \supset H[H]A$, $P\langle P\rangle A \supset \langle P\rangle PA$
$G[G]A \supset [G]GA$, $\langle F\rangle FA \supset F\langle F\rangle A$, $H[H]A \supset [H]HA$, $\langle P\rangle PA \supset P\langle P\rangle A$
$[G]GA \equiv G[G]A$, $F\langle F\rangle A \equiv \langle F\rangle FA$, $[H]HA \equiv H[H]A$, $P\langle P\rangle A \equiv \langle P\rangle PA$
$PGA \supset GPA$, $FHA \supset HFA$, $\langle P\rangle[G]A \supset [G]\langle P\rangle A$, $\langle F\rangle[H]A \supset [H]\langle F\rangle A$
$\langle P\rangle GA \supset G\langle P\rangle A$, $F[H]A \supset [H]FA$, $\langle F\rangle HA \supset H\langle F\rangle A$, $P[G]A \supset [G]PA$

Tabell 8

Teorem 2. Alla satser i tabell 8 är teorem i alla system i den här uppsatsen.

Bevis. Jag skall gå igenom några bevis för att belysa tablåmetoden. Resten lämnas till läsaren.

$A \supset HFA$

(1) $\neg(A \supset HFA)$, 0
(2) A, 0 [1, $\neg\supset$]
(3) $\neg HFA$, 0 [1, $\neg\supset$]
(4) $P\neg FA$, 0 [3, $\neg H$]
(5) $1 < 0$ [4, P]
(6) $\neg FA$, 1 [4, P]
(7) $G\neg A$, 1 [6, $\neg F$]
(8) $\neg A$, 0 [5, 7, G]
(9) * [2, 8]

$A \supset GPA$

(1) $\neg(A \supset GPA)$, 0
(2) A, 0 [1, $\neg\supset$]
(3) $\neg GPA$, 0 [1, $\neg\supset$]
(4) $F\neg PA$, 0 [3, $\neg G$]
(5) $0 < 1$ [4, F]
(6) $\neg PA$, 1 [4, F]
(7) $H\neg A$, 1 [6, $\neg P$]
(8) $\neg A$, 0 [5, 7, H]
(9) * [2, 8]

Notera att dessa bevis inte är korrekta i de multimodal system som beskrivs i Rönnedal (2014). $A \supset HFA$ kan bevisas i alla system som innehåller T-<>C. Beviset ser nästan likadant ut som ovan. Men nod (8) och (9) byts istället ut mot följande noder: (8) $0 > 1$ [5, T-<>C], (9) $\neg A$, 0 [7, 8, G], (10) * [2, 9]. $A \supset GPA$ kan bevisas i alla system som innehåller T-><C. Beviset ovan kan modifieras på ”samma sätt” som beviset för $A \supset HFA$.

$A \supset [G]\langle P\rangle A$ är per definition ekvivalent med $A \supset ((A \vee PA) \wedge G(A \vee PA))$. För att bevisa $A \supset [G]\langle P\rangle A$ räcker det därför med att bevisa den senare satsen. Det gör vi genom att skapa en semantisk tablå för negationen av $A \supset ((A \vee PA) \wedge G(A \vee PA))$. Om denna tablå är sluten, så har vi vårt bevis.

(1) $\neg(A \supset ((A \vee PA) \wedge G(A \vee PA)))$, 0
(2) A, 0 [1, $\neg\supset$]
(3) $\neg((A \vee PA) \wedge G(A \vee PA))$, 0 [1, $\neg\supset$]

↙	↘
(4) $\neg(A \vee PA)$, 0 [3, $\neg\wedge$]	(5) $\neg G(A \vee PA)$, 0 [3, $\neg\wedge$]
(6) $\neg A$, 0 [4, $\neg\vee$]	(7) $F\neg(A \vee PA)$, 0 [5, $\neg G$]
(8) $\neg PA$, 0 [4, $\neg\vee$]	(9) $0 < 1$ [7, F]
(10) * [2, 6]	(11) $\neg(A \vee PA)$, 1 [7, F]
	(12) $\neg A$, 1 [11, $\neg\vee$]
	(13) $\neg PA$, 1 [11, $\neg\vee$]
	(14) $H\neg A$, 1 [13, $\neg P$]
	(15) $\neg A$, 0 [9, 14, H]
	(16) * [2, 15]

$G[G]A \supset [G]GA$ är per definition ekvivalent med $G(A \wedge GA) \supset (GA \wedge GGA)$. För att bevisa $G[G]A \supset [G]GA$ skapar vi därför en semantisk tablå som börjar med negationen av $G(A \wedge GA) \supset (GA \wedge GGA)$. Är denna tablå sluten, har vi bevisat $G(A \wedge GA) \supset (GA \wedge GGA)$ och därmed också $G[G]A \supset [G]GA$.

(1) $\neg(G(A \wedge GA) \supset (GA \wedge GGA))$, 0
(2) $G(A \wedge GA)$, 0 [1, $\neg\supset$]
(3) $\neg(GA \wedge GGA)$, 0 [1, $\neg\supset$]

↙	↘
(4) $\neg GA$, 0 [3, $\neg\wedge$]	(5) $\neg GGA$, 0 [3, $\neg\wedge$]
(6) $F\neg A$, 0 [4, $\neg G$]	(7) $F\neg GA$, 0 [5, $\neg G$]
(8) $0 < 1$ [6, F]	(9) $0 < 1$ [7, F]
(10) $\neg A$, 1 [6, F]	(11) $\neg GA$, 1 [7, F]
(12) $A \wedge GA$, 1 [2, 8, G]	(13) $A \wedge GA$, 1 [2, 9, G]
(14) A, 1 [12, $\wedge$]	(15) A, 1 [13, $\wedge$]
(16) GA, 1 [12, $\wedge$]	(17) GA, 1 [13, $\wedge$]
(18) * [10, 14]	(19) * [11, 17]

$P[G]A \supset [G]PA =$
$P(A \wedge GA) \supset (PA \wedge GPA)$

(1) ¬(P(A ∧ GA) ⊃ (PA ∧ GPA)), 0
(2) P(A ∧ GA), 0 [1, ¬⊃]
(3) ¬(PA ∧ GPA), 0 [1, ¬⊃]
↙ ↘

(4) ¬PA, 0 [3, ¬∧]	(5) ¬GPA, 0 [3, ¬∧]
(6) H¬A, 0 [4, ¬P]	(7) F¬PA, 0 [5, ¬G]
(8) 1 < 0 [2, P]	(9) 0 < 1 [7, F]
(10) A ∧ GA, 1 [2, P]	(11) ¬PA, 1 [7, F]
(12) A, 1 [10, ∧]	(13) H¬A, 1 [11, ¬P]
(14) GA, 1 [10, ∧]	(15) 2 < 0 [2, P]
(16) ¬A, 1 [6, 8, H]	(17) A ∧ GA, 2 [2, P]
(18) * [12, 16]	(19) A, 2 [17, ∧]
	(20) GA, 2 [17, ∧]
	(21) A, 0 [15, 20, G]
	(22) ¬A, 0 [9, 13, H]
	(23) * [21, 22] ■

Sys	Teorem
<4	HA ⊃ [H]HA, [H]A ⊃ H[H]A, HA ⊃ H[H]A, ⟨P⟩PA ⊃ PA, P⟨P⟩A ⊃ ⟨P⟩A, P⟨P⟩A ⊃ PA, GA ⊃ [G]GA, [G]A ⊃ G[G]A, GA ⊃ G[G]A, ⟨F⟩FA ⊃ FA, F⟨F⟩A ⊃ ⟨F⟩A, F⟨F⟩A ⊃ FA HA ≡ [H]HA, HA ≡ H[H]A, ⟨P⟩PA ≡ PA, P⟨P⟩A ≡ PA, GA ≡ [G]GA, GA ≡ G[G]A, ⟨F⟩FA ≡ FA, F⟨F⟩A ≡ FA [H]A ⊃ [H][H]A, ⟨P⟩⟨P⟩A ⊃ ⟨P⟩A, [G]A ⊃ [G][G]A, ⟨F⟩⟨F⟩A ⊃ ⟨F⟩A, [H][H]A ≡ [H]A, ⟨P⟩⟨P⟩A ≡ ⟨P⟩A, [G][G]A ≡ [G]A, ⟨F⟩⟨F⟩A ≡ ⟨F⟩A.
<C	[G][H]A ⊃ [H][G]A, ⟨P⟩⟨F⟩A ⊃ ⟨F⟩⟨P⟩A, [H][G]A ⊃ [G][H]A, ⟨F⟩⟨P⟩A ⊃ ⟨P⟩⟨F⟩A, [G][H]A ≡ [H][G]A, ⟨P⟩⟨F⟩A ≡ ⟨F⟩⟨P⟩A, [H][G]A ≡ [G][H]A, ⟨F⟩⟨P⟩A ≡ ⟨P⟩⟨F⟩A
<LB	PHA ⊃ HPA, P[H]A ⊃ [H]PA, ⟨P⟩HA ⊃ H⟨P⟩A, ⟨P⟩[H]A ⊃ [H]⟨P⟩A
<UB	FGA ⊃ GFA, F[G]A ⊃ [G]FA, ⟨F⟩GA ⊃ G⟨F⟩A, ⟨F⟩[G]A ⊃ [G]⟨F⟩A

<C	$HGA \supset GHA$, $FPA \supset PFA$,
<PD	$[H]GA \supset G[H]A$, $F\langle P\rangle A \supset \langle P\rangle FA$, $H[G]A \supset [G]HA$, $\langle F\rangle PA \supset P\langle F\rangle A$,
<4	$\langle P\rangle HA \supset H\langle P\rangle A$, $P[H]A \supset [H]PA$
<C	$GHA \supset HGA$, $PFA \supset FPA$,
<FD	$[G]HA \supset H[G]A$, $P\langle F\rangle A \supset \langle F\rangle PA$, $G[H]A \supset [H]GA$, $\langle P\rangle FA \supset F\langle P\rangle A$,
<4	$\langle F\rangle GA \supset G\langle F\rangle A$, $F[G]A \supset [G]FA$
<C	$HGA \equiv GHA$, $FPA \equiv PFA$, $GHA \equiv HGA$, $PFA \equiv FPA$, $[H]GA \equiv$
<PD	$G[H]A$, $F\langle P\rangle A \equiv \langle P\rangle FA$, $H[G]A \equiv [G]HA$, $\langle F\rangle PA \equiv P\langle F\rangle A$, $[G]HA \equiv$
<FD	$H[G]A$, $P\langle F\rangle A \equiv \langle F\rangle PA$, $G[H]A \equiv [H]GA$, $\langle P\rangle FA \equiv F\langle P\rangle A$, $[G][H]A \equiv$
<4	$[H][G]A$, $\langle P\rangle\langle F\rangle A \equiv \langle F\rangle\langle P\rangle A$, $[H][G]A \equiv [G][H]A$, $\langle F\rangle\langle P\rangle A \equiv \langle P\rangle\langle F\rangle A$

Tabell 9 (Sys = System)

Teorem 3. Alla satser i tabell 9 är teorem i de nämnda systemen.

Bevis. Jag skall gå igenom några bevis för att belysa tablåmetoden. Resten lämnas till läsaren.

$H[G]A \supset [G]HA = H(A \wedge GA) \supset (HA \wedge GHA)$

(1) $\neg(H(A \wedge GA) \supset (HA \wedge GHA))$, 0
(2) $H(A \wedge GA)$, 0 [1, $\neg\supset$]
(3) $\neg(HA \wedge GHA)$, 0 [1, $\neg\supset$]

$\swarrow$ $\searrow$

(4) $\neg HA$, 0 [3, $\neg\wedge$]	(5) $\neg GHA$, 0 [3, $\neg\wedge$]
(6) $P\neg A$, 0 [4, $\neg H$]	(7) $F\neg HA$, 0 [5, $\neg G$]
(8) $1 < 0$ [6, P]	(9) $0 < 1$ [7, F]
(10) $\neg A$, 1 [6, P]	(11) $\neg HA$, 1 [7, F]
(12) $A \wedge GA$, 1 [2, 8, H]	(13) $P\neg A$, 1 [11, $\neg H$]
(14) A, 1 [12, $\wedge$]	(15) $2 < 1$ [13, P]
(16) GA, 1 [12, $\wedge$]	(17) $\neg A$, 2 [13, P]
(18) * [10, 14]	$\swarrow$ $\downarrow$ $\searrow$

(19) $2 < 0$ [<C]	(20) $2 = 0$ [<C]	(21) $0 < 2$ [<C]
(22) $A \wedge GA$, 2 [2,19,H]	(23) $3 < 0$ [<PD]	(24) $3 < 0$ [<PD]
(25) A, 2 [22, $\wedge$]	(26) $A \wedge GA$, 3	(27) $A \wedge GA$, 3
(28) GA, 2 [22, $\wedge$]	(29) A, 3 [26, $\wedge$]	(30) A, 3 [27,$\wedge$]
(31) * [17, 25]	(32) GA, 3 [26, $\wedge$]	(33) GA, 3
	(34) A, 0 [23, 32, G]	(35) $3 < 2$ [<4]
	(36) A, 2 [20, 34, Id]	(37) A, 2 [G]
	(38) * [17, 36]	(39) * [17, 37]

Nod (19), (20) och (21) ovan fås från ((9) och (15) med) <C (<PC). Nod (26) härleds från (2) och (23) med hjälp av H, och (27) från (2) och (24) med samma regel. Nod (33) fås från (27) med $\wedge$. Nod (35) härleds från (21) och (24) med <4. Nod (37) fås från (33) och (35) med G.

$P[H]A \supset [H]PA =$
$P(A \wedge HA) \supset (PA \wedge HPA)$

$$(1)\ \neg(P(A \wedge HA) \supset (PA \wedge HPA)),\ 0$$
$$(2)\ P(A \wedge HA),\ 0\ [1, \neg\supset]$$
$$(3)\ \neg(PA \wedge HPA),\ 0\ [1, \neg\supset]$$
$$(4)\ 1 < 0\ [2, P]$$
$$(5)\ A \wedge HA,\ 1\ [2, P]$$
$$(6)\ A,\ 1\ [5, \wedge]$$
$$(7)\ HA,\ 1\ [5, \wedge]$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$

(8) $\neg PA$, 0 [3, $\neg\wedge$]	(9) $\neg HPA$, 0 [3, $\neg\wedge$]
(10) $H\neg A$, 0 [8, $\neg P$]	(11) $P\neg PA$, 0 [9, $\neg H$]
(12) $\neg A$, 1 [4, 10, H]	(13) $2 < 0$ [11, P]
(14) * [6, 12]	(15) $\neg PA$, 2 [11, P]
	(16) $H\neg A$, 2 [15, $\neg P$]
	(17) $3 < 1$ [4, 13, $<$LB]
	(18) $3 < 2$ [4, 13, $<$LB]
	(19) A, 3 [7, 17, H]
	(20) $\neg A$, 3 [16, 18, H]
	(21) * [19, 20] ■

Teorem 4. Första teoremet (i)-(iv) i avsnitt 4.3 i Rönnedal (2014) gäller också för alla system i den här uppsatsen.

Bevis. För den som vill lära sig handskas med systemen i den här uppsatsen kan det vara en trevlig övning att gå igenom alla dessa teorem. ■

Teorem 5. (i) Alla satser i tabell 21 och 22 i Rönnedal (2014) är teorem i alla system i den här uppsatsen. (ii) Alla satser i tabell 20 och 23 är teorem i alla system i den här uppsatsen som innehåller T-<FD. Byt ut varje förekomst av G mot H, varje förekomst av [G] mot [H], varje förekomst av F mot P, och varje förekomst av ⟨F⟩ mot ⟨P⟩ i tabell 20-23 i Rönnedal (2014). Då gäller det att (iii) varje sats som är ett resultat av en sådan substitution i tabell 21 och 22 är ett teorem i varje system i den här uppsatsen, och (iv) varje sats som är ett

resultat av en sådan substitution i tabell 20 och 23 är ett teorem i alla system i den här uppsatsen som innehåller T-<PD.

Bevis. Jag går igenom ett exempel och lämnar resten till läsaren. Övriga satser kan bevisas på liknande sätt.

$[G](A \supset B) \supset ([G]A \supset [G]B) =$
$((A \supset B) \wedge G(A \supset B)) \supset ((A \wedge GA) \supset (B \wedge GB))$

(1) $\neg(((A \supset B) \wedge G(A \supset B)) \supset ((A \wedge GA) \supset (B \wedge GB)))$, 0
(2) $(A \supset B) \wedge G(A \supset B)$, 0 [1, $\neg\supset$]
(3) $\neg((A \wedge GA) \supset (B \wedge GB))$, 0 [1, $\neg\supset$]
(4) $A \supset B$, 0 [2, $\wedge$]
(5) $G(A \supset B)$, 0 [2, $\wedge$]
(6) $A \wedge GA$, 0 [3, $\neg\supset$]
(7) $\neg(B \wedge GB)$, 0 [3, $\neg\supset$]
(8) A, 0 [6, $\wedge$]
(9) GA, 0 [6, $\wedge$]

$\swarrow$ $\searrow$

(10) $\neg A$, 0 [4, $\supset$] | (11) B, 0 [4, $\supset$]
(12) * [8, 10]

(11) B, 0 [4, $\supset$]: $\swarrow$ $\searrow$

(13) $\neg B$, 0 [7, $\neg\wedge$] | (14) $\neg GB$, 0 [7, $\neg\wedge$]
(15) * [11, 13] | (16) $F\neg B$, 0 [14, $\neg G$]
(17) $0 < 1$ [16, F]
(18) $\neg B$, 1 [16, F]
(19) A, 1 [9, 17, G]
(20) $A \supset B$, 1 [5, 17, G]

$\swarrow$ $\searrow$

(21) $\neg A$, 1 [20, $\supset$] | (22) B, 1 [20, $\supset$]
(23) * [19, 21] | (24) * [18, 22] ■

Ibland kan det vara enklare att bevisa en sats i ett multimodalt system av den typ som beskrivs i Rönnedal (2014) än i ett bimodalt system av den typ som används i den här uppsatsen, bl.a. eftersom bevisen i de tidigare systemen ibland är kortare än bevisen i de senare. Tablån för negationen av $[G](A \supset B) \supset ([G]A \supset [G]B)$ är t.ex. betydligt kortare än trädet ovan. Ännu tydligare blir detta om man vill bevisa en sats med många operatorer av samma typ, t.ex. $([H](A \vee B) \wedge [H](A \vee [H]B) \wedge [H]([H]A \vee B)) \supset ([H]A \vee [H]B)$. Denna sats är ett teorem i alla multimodala system som innehåller T-≤PC. Satsen kan även bevisas i alla system i den här uppsatsen som innehåller T-<PC. Men då måste man först översätta den till följande sats i primitiv notation: $(((A \vee B) \wedge H(A \vee B)) \wedge ((A \vee (B \wedge HB)) \wedge H(A \vee (B \wedge HB))) \wedge (((A \wedge HA) \vee B) \wedge H((A \wedge HA) \vee B))) \supset ((A \wedge HA) \vee (B \wedge HB))$, och skapa en semantisk tablå för negationen av denna sats.

Ibland kan det vara enklare att bevisa en sats i ett bimodalt system av det slag som används i den här uppsatsen än i ett multimodalt system av det slag som beskrivs i Rönnedal (2014), bl.a. eftersom man måste hålla reda på en mängd olika tillgänglighetsrelationer i de senare.

Låt mig avsluta detta avsnitt med att nämna ytterligare några teorem i olika system.

System	Teorem
T-<4	$HA \supset HHA$, $PPA \supset PA$, $GA \supset GGA$, $FFA \supset FA$
	$FA \supset HFA$, $PGA \supset GA$, $PA \supset GPA$, $FHA \supset HA$
T-<PD	$HA \supset PA$, $\neg(HA \wedge H\neg A)$, $HA \supset \langle P\rangle A$, $[H]A \supset PA$
T-<FD	$GA \supset FA$, $\neg(GA \wedge G\neg A)$, $GA \supset \langle F\rangle A$, $[G]A \supset FA$
T-<DE	$PA \supset PPA$, $HHA \supset HA$, $(A \vee H(\bot \vee HB)) \supset (A \vee HB)$
	$FA \supset FFA$, $GGA \supset GA$, $(A \vee G(\bot \vee GB)) \supset (A \vee GB)$
T-<PC	$H([H]A \supset B) \vee H([H]B \supset A)$
	$FPA \supset (PA \vee A \vee FA)$, $(HA \wedge A \wedge GA) \supset GHA$
	$PA \supset H(FA \vee A \vee PA)$, $P(HA \wedge A \wedge GA) \supset HA$
	$(PA \wedge PB) \supset (P(A \wedge B) \vee P(A \wedge PB) \vee P(PA \wedge B))$
	$(H(A \vee B) \wedge H(A \vee HB) \wedge H(HA \vee B)) \supset (HA \vee HB)$
	$H((A \wedge HA) \supset B) \vee H((B \wedge HB) \supset A)$
	$(\langle P\rangle A \wedge \langle P\rangle B) \supset (\langle P\rangle(A \wedge B) \vee \langle P\rangle(A \wedge \langle P\rangle B) \vee \langle P\rangle(\langle P\rangle A \wedge B))$
	$([H](A \vee B) \wedge [H](A \vee [H]B) \wedge [H]([H]A \vee B)) \supset ([H]A \vee [H]B)$
	$P(HB \wedge \neg A) \supset H(A \supset (HA \supset B))$, $H(A \supset (HA \supset B)) \vee H(HB \supset A)$
T-<FC	$G([G]A \supset B) \vee G([G]B \supset A)$
	$PFA \supset (PA \vee A \vee FA)$, $(HA \wedge A \wedge GA) \supset HGA$
	$FA \supset G(PA \vee A \vee FA)$, $F(HA \wedge A \wedge GA) \supset GA$
	$(FA \wedge FB) \supset (F(A \wedge B) \vee F(A \wedge FB) \vee F(FA \wedge B))$
	$(G(A \vee B) \wedge G(A \vee GB) \wedge G(GA \vee B)) \supset (GA \vee GB)$
	$G((A \wedge GA) \supset B) \vee G((B \wedge GB) \supset A)$
	$(\langle F\rangle A \wedge \langle F\rangle B) \supset (\langle F\rangle(A \wedge B) \vee \langle F\rangle(A \wedge \langle F\rangle B) \vee \langle F\rangle(\langle F\rangle A \wedge B))$
	$([G](A \vee B) \wedge [G](A \vee [G]B) \wedge [G]([G]A \vee B)) \supset ([G]A \vee [G]B)$
	$F(GB \wedge \neg A) \supset G(A \supset (GA \supset B))$, $(G(A \supset (GA \supset B)) \vee G(GB \supset A)$

Tabell 10

System	Teorem
<FD<4	$FA \supset FPA$, $GHA \supset GA$,
	$GHA \supset (HA \wedge A \wedge GA)$, $(PA \vee A \vee FA) \supset FPA$
<PD<4	$PA \supset PFA$, $HGA \supset HA$,
	$HGA \supset (HA \wedge A \wedge GA)$, $(PA \vee A \vee FA) \supset PFA$
FD4FC	$GHA \supset HGA$, $PFA \supset FPA$
PD4PC	$HGA \supset GHA$, $FPA \supset PFA$
PD4FC	$HGA \equiv (HA \wedge A \wedge GA)$, $PFA \equiv (PA \vee A \vee FA)$
FD4PC	$GHA \equiv (HA \wedge A \wedge GA)$, $FPA \equiv (PA \vee A \vee FA)$
<C<4	$H(HA \supset HB) \vee H(HB \supset HA)$, $G(GA \supset GB) \vee G(GB \supset GA)$
<4<LB	$(PA \wedge PB) \supset P(FA \wedge FB)$, $H(GA \vee GB) \supset (HA \vee HB)$
<4<UB	$(FA \wedge FB) \supset F(PA \wedge PB)$, $G(HA \vee HB) \supset (GA \vee GB)$

Tabell 11

Teorem 6. Alla satser i tabell 10 och tabell 11 är teorem i de omnämnda systemen.

Bevis. Lämnas till läsaren. ■

5. Sundhets- och fullständighetsteorem

Begreppen sundhet och fullständighet definieras som vanligt. Låt oss emellertid repetera dessa definitioner. Vi säger att S korresponderar med en klass av ramar, **F**, (och att **F** korresponderar med S) omm $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\text{C-A}_1, \ldots, \text{C-A}_n)$, där $S = \text{TT-A}_1 \ldots \text{T-A}_n$ är ett normalt temporalt tablåsystem.

S är (starkt) sunt i relation till (relativt till eller med avseende på) **F** omm $\Sigma \vdash_S A$ medför $\Sigma \Vdash_{\mathbf{F}} A$. S är (starkt) fullständigt i relation till (relativt till eller med avseende på) **F** omm $\Sigma \Vdash_{\mathbf{F}} A$ medför $\Sigma \vdash_S A$.

I det här avsnittet visar vi att alla de temporala tablåsystem vi kan konstruera med hjälp av våra tablåregler är sunda och fullständiga med avseende på deras semantik.

5.1. Sundhet

Låt M vara en (monotemporal) modell och b en gren på en tablå. Då är b (eller mängden av satser på b) satisfierbar i M omm det finns en funktion, f, från de naturliga talen till mängden av alla tidpunkter T sådan att:

(i) A är sann i f(i) i M, för varje nod A, i på b;
(ii) om $i < j$ är på b, så är $f(i) < f(j)$ i M;
om $i = j$ är på b, så är $f(i) = f(j)$ i M.

Om f uppfyller dessa villkor, skall vi säga att f visar att b är satisfierbar i M.

Lemma (Sundhetslemma). Låt b vara en gren på en tablå och M vara en (monotemporal) modell. Om b är satisfierbar i M och en tablåregel tillämpas på b, så produceras åtminstone en extension, b′, av b sådan att b′ är satisfierbar i M.

Bevis. Som vanligt börjar vi med att visa att sundhetslemmat gäller för T. Sen utvidgar vi det till andra system. Detta görs på samma sätt som i olika modala system och som i multimodal tidslogik (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b), (2014) och Priest (2008)). Låt oss gå igenom några tillgänglighets-regler. Utelämnade steg bevisas på liknande sätt. Stegen för de satslogiska reglerna är välkända. Stegen för de grundläggande temporala reglerna är enkla modifikationer av välkända bevis.

T-<FD. Antag att vi har i på b, och att vi tillämpar T-<FD och får en utvidgad gren, b′, av b som innehåller i < j, där j är ny på grenen. Eftersom b är satisfierbar i M, så finns det en tidpunkt f(i) i M. M uppfyller villkoret C-<FD. Alltså finns det en tidpunkt t i M, sådan att f(i) < t. Låt f′ vara likadan som f förutom att f′(j) = t. Då gäller det att f′(i) < f′(j). Eftersom j inte förekommer på b, visar f′ att b′ är satisfierbar i M.

T-<C. Antag att vi har i och j på b, och att vi tillämpar T-<C på denna gren. Då får vi tre utvidgningar av b, som slutar med i < j, i = j, respektive j < i. Eftersom b är satisfierbar i M, så är f(i) och f(j) i M. M uppfyller villkoret C-<C. Alltså gäller det att f(i) < f(j), f(i) = f(j) eller f(j) < f(i) i M. I varje fall finns det en extension, b′, av b sådan att b′ är satisfierbar i M.

T-<DE. Antag att vi har i < j på b, och att vi tillämpar regeln T-<DE och får i < k och k < j, där k är ny på grenen. Eftersom b är satisfierbar i M så finns det en funktion f sådan att f(i) < f(j) i M. M uppfyller villkoret C-<DE. Således finns det en tidpunkt t i M, sådan att f(i) < t och t < f(j). Låt f′ vara likadan som f förutom att f′(k) = t. Då gäller det att f′(i) < f′(k) och f′(k) < f′(j). Eftersom k inte förekommer på b, visar f′ att b′ är satisfierbar i M.

T-<FC. Antag att i < j och i < k är på b och att vi tillämpar T-<FC på denna gren. Då får vi tre utvidgningar av b, som slutar med j < k, j = k, respektive k < j. Eftersom b är satisfierbar i M, så gäller det att f(i) < f(j) och f(i) < f(k) i M. M uppfyller villkoret C-<FC. Det följer att f(j) < f(k), f(j) = f(k) eller f(k) < f(j) i M. I varje fall finns det en extension, b′, av b sådan att b′ är satisfierbar i M.

Id(I). Antag att vi har A(i) och i = j på b och att vi tillämpar Id(I) på denna gren. Då får en utvidgning av b som innehåller A(j). Eftersom b är satisfierbar i M, så gäller det att f(i) = f(j). Om A(i) är A, i, så är A sann i f(i).

Alltså är A sann i f(j). Om A(i) är i < k, så gäller det att f(i) < f(k). Det följer att f(j) < f(k), vilket skulle bevisas osv. I varje fall gäller alltså lemmat. ■

Teorem 7 (Sundhetsteorem). Låt S vara ett av de temporala system som vi har introducerat i den här uppsatsen och låt **F** vara den klass av ramar som korresponderar med S. Då är S starkt sunt med avseende på **F**.

Bevis. När vi väl har etablerat sundhetslemmat kan vi bevisa sundhetsteoremet på samma sätt som för olika modala eller multimodala system (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b) eller Priest (2008)). ■

5.2. Fullständighet

Inducerad modell (Def.IM). Låt b vara en öppen (avslutad) gren i en semantisk tablå, och låt I vara mängden av alla tal på b. Vi skall säga att i ~ j omm i = j, eller ”i = j” eller ”j = i” förekommer på b. ~ är en ekvivalensrelation och [i] är i's ekvivalensklass (definierad av denna relation). Den monotemporala modell, M = <T, <, V>, som induceras från b definieras på följande sätt:

$T = \{t_{[i]}: i \in I\}$;
$t_{[i]} < t_{[j]}$ omm i < j förekommer på b;
p är sann vid $t_{[i]}$, om p, i förekommer på b;
p är falsk vid $t_{[i]}$, om ¬p, i förekommer på b.

Om vårt tablåsystem inte innehåller några identitetsregler, reduceras ~ till identitet och [i] = i. Alltså kan vi i sådana system låta T vara $\{t_i: i \in I\}$ och göra oss av med ekvivalensklasserna. Notera också att < och V är väldefinierade. Tack vare identitetsreglerna gäller det nämligen att om [i] = [i′] och [j] = [j′], så är i < j på b omm i′ < j′ är på b, p, i är på b omm p, i′ är på b, och ¬p, i är på b omm ¬p, i′ är på b.

Lemma (Fullständighetslemma). Låt b vara en gren på en fullständig tablå och låt M vara en modell som induceras från b. Då gäller det att:

(i) Om A, i är på b, så är A sann i $t_{[i]}$, och

(ii) Om ¬A, i är på b, så är A falsk i $t_{[i]}$.

Bevis. Beviset är i allt väsentligt detsamma som för olika modala system och multimodal tidslogik (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b) eller Priest (2008)). Stegen för de satslogiska konnektiven och för de grundläggande temporala operatorerna är välkända eller modifikationer av välkända bevis. ■

Teorem 8 (Fullständighetsteorem). Låt S vara ett av de system vi diskuterar i den här uppsatsen och låt **F** vara den klass av ramar som korresponderar med S. Då är S (starkt) fullständigt i relation till **F**.

Bevis. Beviset är i allt väsentligt detsamma som för olika modala och multimodala system (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b), (2014) eller Priest (2008)).

Den intressanta nyheten är att vi måste visa att den modell som induceras från den öppna grenen, b, i varje fall är av rätt slag. Vi skall gå igenom några av alla steg. Övriga fall bevisas på liknande sätt.

C-<FD. Antag att $t_{[i]} \in T$. Då förekommer i på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har T-<FD tillämpats och vi har $i < j$, för något j, på b. Det följer att det finns en tidpunkt $t_{[j]}$, sådan att $t_{[i]} < t_{[j]}$ [från Def.IM].

C-<4. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$ och $t_{[j]} < t_{[k]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]}, t_{[k]} \in T$. Då förekommer $i < j$ och $j < k$ på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har T-<4 applicerats och vi har $i < k$ på b. Det följer att $t_{[i]} < t_{[k]}$ [från Def.IM].

C-<DE. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]} \in T$. Då förekommer $i < j$ på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har T-<DE tillämpats och vi har $i < k$ och $k < j$, där k är ny. Det följer att det finns en tidpunkt $t_{[k]}$, sådan att $t_{[i]} < t_{[k]}$ och $t_{[k]} < t_{[l]}$ [från Def.IM].

C-<FC. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$ och $t_{[i]} < t_{[k]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]}, t_{[k]} \in T$. Då förekommer $i < j$ och $i < k$ på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har vi tillämpat T-<FC och vi har $j < k$, $j = k$ eller $k < j$ på b. Om $j = k$ är på b, så $j \sim k$; och om $j \sim k$, så $[j] = [k]$. Det följer att $t_{[j]} < t_{[k]}$, $t_{[j]} = t_{[k]}$ eller $t_{[k]} < t_{[j]}$, vilket skulle bevisas [från Def.IM].

C-<UB. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$ och $t_{[i]} < t_{[k]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]}, t_{[k]} \in T$. Då förekommer $i < j$ och $i < k$ på b [från Def.IM]. T-<UB har applicerats, eftersom b är fullständig. Alltså har vi $j < l$ och $k < l$ på b, där l är ny. Det följer att det finns en tidpunkt $t_{[l]}$ i T, sådan att $t_{[j]} < t_{[l]}$ och $t_{[k]} < t_{[l]}$ [från Def.IM]. ■

Referenser

Barringer, H. Fisher, M. Gabbay, D. & Gough, G. (red.) (2000). *Advances in Temporal Logic*. Springer.

Beth, E. W. (1955). Semantic Entailment and Formal Derivability. *Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Afdeling Letterkunde, N.S., vol. 18, no. 13, Amsterdam, ss. 309–342. Publicerad på nytt i Hintikka (1969), ss. 9–41.

Beth, E. W. (1959). *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam.

Burgess, J. P. (1984). Basic Tense Logic. I D. Gabbay & F. Guenthner (red.) *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 2, Dordrecht: Reidel, ss. 89-133.

D'Agostino, M., Gabbay, D., Hähnle, R., & Posegga, J. (red.) (1999) *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fitting, M. & Mendelsohn, R. L. (1998). *First-Order Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers.

Finger, M. Gabbay, D. & Reynolds, M. (2002). Advanced Tense Logic. I D. Gabbay & F. Guenther (red.) *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 7, Kluwer Academic Publishers, ss. 43-203.

Galton, A. (1999). Temporal Logic. I N. Zalta (red.) *Stanford Encyclopedia* of Philosophy. Hämtat från <http://plato.stanford.edu/entries/logic-temporal/> den 17 oktober 2014. Först publicerat 29 november 1999, uppdaterat 7 februari 2008.

Garson, J. W. (2006). *Modal Logic for Philosophers*. New York: Cambridge University Press.

Gentzen, G. (1935). Untersuchungen über das Logische Shliessen I. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 176–210. Engelsk översättning "Investigations into Logical Deduction", i Szabo (1969).

Gentzen, G. (1935b). Untersuchungen über das Logische Shliessen II. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 405–431. Engelsk översättning "Investigations into Logical Deduction", i Szabo (1969).

Goldblatt, R. (1992). *Logics of Time and Computation*. CSLI.

Hintikka, J. (1969). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford Readings in Philosophy, Oxford University Press.

Jeffrey, R. C. (1967). *Formal Logic: Its Scope and Limits*. New York: McGraw-Hill.

Kröger, F. & Merz, S. (2008). *Temporal Logic and State Systems*. Springer.

McArthur, R. P. (1976). *Tense Logic*. Dordrecht: Reidel Publishing.

Needham, P. (1975). *Temporal Perspective*. Filosofiska Studier 25, Uppsala Universitet.

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Prior, A. N. (1957). *Time and Modality*. Oxford.

Prior, A. N. (1967). *Past, Present and Future*. Oxford.

Rescher, N. & Urquhart, A. (1971). *Temporal logic*. Wien: Springer-Verlag.

Rönnedal, D. (2012). Temporal alethic-deontic logic and semantic tableaux. *Journal of Applied Logic*, 10, ss. 219-237.

Rönnedal, D. (2012b). *Extensions of Deontic Logic: An Investigation into some Multi-Modal Systems*. Department of Philosophy, Stockholm University.
Rönnedal, D. (2014). Tidslogik som Multimodal Logik. *Filosofiska Notiser*, Årgång 1, Nr. 1, ss. 59-90.
Smullyan, R. M. (1968). *First-Order Logic*. Heidelberg: Springer-Verlag.
Szabo, M. E. (red.) (1969). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland, Amsterdam.
van Benthem, J. (1983). *The Logic of Time*. Dordrecht, Boston and London: Kluwer Academic Publishers.
Øhrstrøm P. & Hasle, P. F. V. (1995). *Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Daniel Rönnedal
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
daniel.ronnedal@philosophy.su.se