Kollektiva Val och Arrows Teorem

Per-Erik Malmnäs

Abstrakt
I denna essä ges förhoppningsvis nya argument för att en del av de villkor som ekonomen Kenneth Arrow ansett som nödvändiga för rationella kollektiva beslut i själva verket är orimliga och att det inte föreligger några hinder för att på ett rationellt sätt generera kollektiva preferenser och träffa kollektiva val. Vi behöver bara låta slumpexperiment få spela en viss roll.

1. Introduktion

Det är en allmänt spridd uppfattning, se t.ex. kapitel 14 i referens 2, att ekonomen Kenneth Arrow med sitt möjlighetsteorem, se t.ex. sid. 59 i referens 1, visat att rationella kollektiva beslut bara är möjliga vid val mellan två alternativ och att det därmed t.ex. är omöjligt att på ett tillfredsställande sätt kollektivt rangordna ett kg vetemjöl, ett kg rågmjöl och ett kg kornmjöl på basis av individuella rangordningar av dessa produkter om alla möjliga individuella rangordningar är tillåtna. De krav Arrow ställer på en tillfreds-ställande kollektiva rangordning är av två slag: För det första skall den kollektiva rangordningen inte vara oberoende av de individuella rangord-ningarna och inte heller vara styrd av *en* individs rangordning, för det andra skall den kollektiva rangordningen i en viss mening vara konsekvent. Det innebär att om de individuella rangordningarna är lika i ett visst avseende, så skall även det avspegla sig i de kollektiva värderingarna. De senare kraven är dock inte rimliga. För att se det kan vi låta kollektivet bestå av Ferrando och Guglielmo. Om deras preferenser av ovanstående produkter har formen ett kg vetemjöl är bättre än ett kg kornmjöl och minst lika bra som ett kg rågmjöl, så har var och en av dem 13 möjliga preferenser. Den kollektiva preferensen är enligt Arrow i detta fall en preferens, som är en total funktion av Ferrandos och Guglielmos preferenser. Att funktionen är total innebär att den har en preferens som värde för varje par av ingående preferenser. I 13 fall har Ferrando och Guglielmo samma preferens. Då är det rimligt att den kollektiva preferensen sammanfaller med denna. Men i 153 fall är preferenserna olika. Då framstår en lottdragning som det enda rimliga sättet att få fram en kollektiv preferens. Om vi går vidare och även låter Don

Alfonso ingå i kollektivet, så finns det en majoritet för en preferens i 481 fall. Då är det rimligt att den kollektiva preferensen sammanfaller med denna. Men i 1716 fall, så finns det ingen majoritet för någon preferens. Då framstår en lottdragning som det enda rimliga sättet att få fram en kollektiv preferens. Motsvarande gäller även om vi utökar kollektivet med Fiordiligi, Dorabella och Despina. En kollektiv preferens som genereras av ovanstående procedur kommer dock inte att med nödvändighet uppfylla Condition 2 eller Condition 3 i referens 1. Därmed framstår dessa villkor åtminstone för mig som mindre genomtänkta. För att fler personer skall övertygas om detta följer en koncis presentation av Arrows möjlighetsteorem samt ett precist argument för att vissa av Arrows villkor inte är rimliga. Den läsare, som ogillar tekniska detaljer, kan med fördel börja med sista avsnittet.

2. Arrows ram

Arrow utgår från tre objekt på vilka ett antal personer har synpunkter. Synpunkterna har formen x är minst lika bra som y. En sådan relation brukar kallas en svag semiordning. Dess formella egenskaper anges nedan. Vidare antar Arrow att varje person har synpunkter på alla par av objekt. Om vi kallar objekten för a, b, c, så finns det tretton möjliga svaga semiordningar mellan dem. Dessa anges schematiskt i Tabell 1 nedan. Arrow frågar sig om det finns ett rimligt sätt att aggregera individernas synpunkter till en svag semiordning och ger ett nekande svar, se Sats 7 nedan. Han tänker sig därvid att aggregeringen skall ha formen av en funktion vars argument och värde är svaga semiordningar. Vidare skall varje semiordning mellan a, b, c vara ett argument för varje individ. Konkret kan varje individ representeras av en urna i vilken det ligger kulor som är likadana förutom att de är märkta med siffrorna 1–13. Det finns lika många kulor med varje etikett i varje urna. Siffrorna anger en av de 13 semiordningar av a, b och c, som anges i Tabell 1.

En relation R är en *svag semiordning i en mängd M* om och endast om (omm)

1. xRy eller yRx, x, y i M, och
2. xRy och yRz medför xRz, x,y,z i M.

xRy utläses: x är minst lika bra som y.

Med hjälp av R kan vi definiera två nya relationer:

xIy omm xRy och yRx och xPy omm xRy och inte yRx.

xIy utläses: x och y är lika bra och xPy utläses: x är bättre än y. I uppfyller följande villkor:

1. xIx, x i M,
2. xIy medför yIx, x, y i M, och
3. xIy och yIz medför xIz, x, y, z i M.

För P gäller följande:

1. inte xPx, x i M, och
2. xPy och yPz medför xPz, x, y, z i M.

Exempel på svaga semiordningar: minst lika lång som, minst lika tystlåten som, minst lika stökig som, minst lika smart som, minst lika tjatig som.

De möjliga fallen av R och P anges i nedanstående tabell.

Tabell 1

R	P
1. aIbIc	den tomma relationen
2. aIbPc	aPc, bPc
3. cPaIb	cPa, cPb
4. aIcPb	aPb, cPb
5. bPaIc	bPa, bPc
6. bIcPa	bPa, cPa
7. aPbIc	aPb, aPc
8. aPbPc	aPbPc
9. aPcPb	aPcPb
10. bPaPc	bPaPc
11. bPcPa	bPcPa
12. cPaPb	cPaPb
13. cPbPa	cPbPa

Anmärkning. aRa, bRb och cRc har utelämnats under R.

Kommentar. Arrow väljer att enbart betrakta svaga semiordningar. Detta beror förmodligen på att enbart sådana studerades av ekonomer vid denna tid.

2.1. Arrows villkor

Låt $R_1, \dots, R_n$ vara n semiordningar. Med hjälp av dem kan vi bestämma en ny semiordning, säg $f(R_1, \dots, R_n)$. Om $R_1, \dots, R_n$ är ordningarna i de olika urnorna, så är $f(R_1, \dots, R_n)$ tänkt att vara en sammanvägning av dem. Arrow anser att en rimlig sammanvägning skall uppfylla följande fyra villkor.

Låt $R_1, \ldots, R_n$ och $R_1', \ldots, R_n'$ vara två olika ordningar i urnorna. Sätt $R= f(R_1, \ldots, R_n)$ och $R'=f(R_1', \ldots, R_n')$. Låt vidare P vara den strikta ordning som bestäms av R och P' den strikta ordning som bestäms av R'. Låt slutligen x, y och z vara variabler vars värden är a, b och c.

Villkor 1. (V1) Antag att
1. yR_iz omm $yR_i'z$, $1\leq i\leq n$, $x\neq y$, $x\neq z$,
2. xR_iy medför $xR_i'y$, $1\leq i\leq n$, och
3. xP_iy medför $xP_i'y$, $1\leq i\leq n$.
Då xPy medför xP'y.

En illustration. Om x=a och klausulerna 1–3 är uppfyllda, så får vi följande relation mellan R_i och R_i' :
1. Om R_i är relation 1 i Tabell 1, så är R_i' relation 1 eller 7,
2. Om R_i är relation 2, så är R_i' relation 2 eller 8,
3. Om R_i är relation 3, så är R_i' relation 3, 4, 9 eller 12,
4. Om R_i är relation 4, så är R_i' relation 4 eller 9,
5. Om R_i är relation 5, så är R_i' relation 2, 5, 8 eller 10,
6. Om R_i är relation 6, så är R_i' relation 1, 6 eller 7,
7. Om R_i är relation 7, så är R_i' relation 7,
8. Om R_i är relation 8, så är R_i' relation 8,
9. Om R_i är relation 9, så är R_i' relation 9,
10. Om R_i är relation 10, så är R_i' relation 2, 8 eller 10,
11. Om R_i är relation 11, så är R_i' relation 2, 5, 8, 10 eller 11,
12. Om R_i är relation 12, så är R_i' relation 4, 9 eller 12, och
13. Om R_i är relation 13, så är R_i' relation 3, 4, 9, 12 eller 13.

Det innebär att en övergång från R_i till R_i' innebär att a:s rangordning aldrig försämras och att relationen mellan b och c är oförändrad.

Villkor 2. (V2) xR_iy omm $xR_i'y$ och yR_ix omm $yR_i'x$, $1\leq i\leq n$, medför xPy omm xP'y.

Anmärkning. Detta villkor skiljer sig något från Condition 3 i referens 1 men är precis det som behövs i beviset av Sats 1.

Villkor 3. (V3) Om xRy, så xR_iy för något i, $1\leq i\leq n$.

Anmärkning. En ekvivalent variant är

Villkor 3'. Om xP_iy, $1\leq i\leq n$, så xPy.

Villkor 4. (V4) $f(R_1, \ldots, R_n)$ är inte en P_i-projektion, $1 \leq i \leq n$.

Anmärkning. $f(R_1, \ldots, R_n)$ är en P_i-projektion omm xP_iy medför xPy.

2.2. Arrows resultat

Sats 1. Antag att V1 och V2 gäller och att xR_iy medför $xP_i'y$, $1 \leq i \leq n$. Då följer $xP'y$ från xPy.

Bevis. Antag att förutsättningarna är uppfyllda samt att x=a, y=b och aPb. För att kunna använda V1 transformerar vi alla ingående relationer så att c kommer sist och relationen mellan a och b är oförändrad. Transformationen beskrivs närmare i Tabell 2.

Då $aP_{iT}c$, $bP_{iT}c$, $bP_{iT}'c$ och $bP_{iT}'c$, $1 \leq i \leq n$. Vidare: $aR_{iT}b$ medför aR_ib medför $aR_i'b$ medför $aR_{iT}'b$, $1 \leq i \leq n$.

Då ger V1 att aP_Tb medför $aP_T'b$. Vidare gäller det att aR_ib omm $aR_{iT}b$, bR_ia omm $bR_{iT}a$, $aR_i'b$ omm $aR_{iT}'b$ och $bR_i'a$ omm $bR_{iT}'a$, $1 \leq i \leq n$. Då ger V2 att aPb omm aP_Tb och aP'b omm $aP_T'b$. Alltså gäller aP'b. Men därmed är Sats 1 bevisad.

Tabell 2

R	P	R_T	P_T
aIbIc	den tomma relationen	aIb, aPc, bPc	aPc, bPc
aIbPc	aPc, bPc	aIb, aPc, bPc	aPc, bPc
cPaIb	cPa, cPb	aIb, aPc, bPc	aPc, bPc
aIcPb	aPb, cPb	aPbPc	aPbPc
bPaIc	bPa, bPc	bPaPc	bPaPc
bIcPa	bPa, cPa	bPaPc	bPaPc
aPbIc	aPb, aPc	aPbPc	aPbPc
aPbPc	aPbPc	aPbPc	aPbPc
aPcPb	aPcPb	aPbPc	aPbPc
bPaPc	bPaPc	bPaPc	bPaPc
bPcPa	bPcPa	bPaPc	bPaPc
cPaPb	cPaPb	aPbPc	aPbPc
cPbPa	cPbPa	bPaPc	bPaPc

En delmängd M till $\{u_1, \ldots, u_n\}$ är *avgörande för xPy* om xPy för alla $R_1, \ldots, R_n$ sådana att xP_iy för u_i i M.

Sats 2. Antag att V1 och V2 gäller samt att M är en delmängd till $\{u_1, \dots, u_n\}$ och $R_1, \dots, R_n$ sådana att xP_iy för u_i i M, yP_ix om u_i inte är i M och xPy. Då är M avgörande för xPy.

Bevis. Antag att förutsättningarna gäller och att $R_1', \dots, R_n'$ är sådana att xPi'y för u_i i M. Vi skall visa att xP'y. Enligt Sats 1 räcker det att visa att $xP_i'y$ om xR_iy, $1 \leq i \leq n$. Men enligt förutsättningarna är u_i i M om xR_iy. Alltså är Sats 2 bevisad.

Sats 3. Om V3, så är $\{u_1, \dots, u_n\}$ avgörande för xPy.

Bevis. Antag att xP_iy, $1 \leq i \leq n$, för alla semiordningar $R_1, \dots, R_n$. Om $yf(R_1', \dots, R_n')\,x$, för någon följd av semiordningar $R_1', \dots, R_n'$, så ger V3 att $yR_i'x$, för något i, $1 \leq i \leq n$. Men det strider mot antagandet. Därmed är Sats 3 bevisad.

Sats 4. Antag att V1–V3 gäller och att $\{u_i\}$ är avgörande för xPy eller yPz. Då är $\{u_i\}$ avgörande för xPz.

Bevis. Antag att V1–V3 gäller. Sätt för enkelhets skull i=1. Antag först att $\{u_1\}$ är avgörande för xPy. Låt $R_1, \dots, R_n$ vara en följd av ordningar sådan att xP_1y, yP_iz, $1 \leq i \leq n$, och zP_ix, $2 \leq i \leq n$. Då xPy (förutsättningarna) och yPz (V3). Alltså xPz (P transitiv). Då ger Sats 2 (sätt $M=\{u_1\}$) att $\{u_1\}$ är avgörande för xPz. Antag därefter att $\{u_1\}$ är avgörande för yPz. Låt $R_1, \dots, R_n$ vara en följd av ordningar sådan att xP_iy, $1 \leq i \leq n$, yP_1z, och zP_ix, $2 \leq i \leq n$. Då xP_1z (P_1 transitiv), xPy (V3) och yPz (förutsättningarna). Alltså xPz (P transitiv). Då ger Sats 2 att att $\{u_1\}$ är avgörande för xPz. Därmed är Sats 4 bevisad.

Sats 5. Om V1–V3 och $\{u_i\}$ är avgörande för xPy, så är $f(R_1, \dots, R_n)$ en P_i-projektion.

Bevis. Antag försatsen. Då ger Sats 4 att $\{u_i\}$ är avgörande för xPz, yPz, zPy, yPx och zPx. Alltså: xP_iy ger xPy, xP_iz ger xPz, yP_iz ger yPz, zP_iy ger zPy, yP_ix ger yPx och zP_ix ger zPx. Men då är $f(R_1, \dots, R_n)$ en P-projektion. Därmed är Sats 5 bevisad.

Sats 6. Om n>1 och $f(R_1, \dots, R_n)$ uppfyller V1–V3, så är f en P_i-projektion för något i, $1 \leq i \leq n$.

Bevis. Antag att mängden av urnor, säg M, innehåller n element och att n>1. Antag vidare att $f(R_1, \dots, R_n)$ uppfyller V1–V3. Enligt Sats 3 är M avgörande för xPy, för varje ordnat par (x,y). Låt $M_{(x,y)}$ vara en minimal mängd som är avgörande för xPy. Det innebär att ingen mängd av urnor med färre element är avgörande för något ordnat par. Antag för enkelhets skull att $M_{(x,y)} = \{u_1, \dots, u_k\}$. Notera att k=n är en möjlighet. Välj svaga semiordningar $R_1, \dots, R_n$. Sätt xP_1y och yP_1z, zP_ix och xP_iy, $2 \leq i \leq k$, samt yP_iz och zP_ix, $k+1 \leq i \leq n$. Då xPy (def av $M_{(x,y)}$). Vidare zP_iy, $2 \leq i \leq k$ och yP_iz, i=1 eller $k+1 \leq i \leq n$. Om zPy, så ger Sats 2 att $\{u_2, \dots, u_k\}$ är avgörande för zPy. Men det strider mot valet av $M_{(x,y)}$. Alltså inte zPy. Då yRz. Därmed xPz. Nu xP_1z och zP_1x, $2 \leq i \leq n$. Då ger Sats 2 att $\{u_1\}$ är avgörande för xPz. Men $M_{(x,y)}$ är minimal. Alltså är k=1. Då ger Sats 5 att f är en P-projektion.

Sats 7 (Arrows möjlighetsteorem). Om n>1, så finns det ingen funktion $f(R_1, \dots, R_n)$ som uppfyller V1–V4.

Bevis. Sats 7 följer direkt från Sats 6.

2.3. En teknisk kommentar

Det är naturligt att fråga sig vilka P_i-projektioner som uppfyller V1–V3. För att besvara den frågan räcker det med att behandla fallet n=2. Vi kan då först notera att inte både en P_1-projektion och en P_2-projektion kan komma ifråga eftersom P_1(aPbPc, cPbPa)=aPbPc och P_2(aPbPc, cPbPa)=cPbPa. Vidare ser vi att $g(R_1, R_2)=R_1$ eller $h(R_1, R_2)=R_2$ uppfyller V1–V3. För att se vilka de övriga kan vara antar vi först att $g(R_1, R_2)=R_1$ uppfyller V1–V3. Därefter försöker vi att sätta $f(aIbIc, R_2)$=aPbPc. Om f är en P_1-projektion och V2 gäller, så

$$
\begin{gathered}
f(aIbPc, R_2)=aPbPc \\
f(cPaIb, R_2)=cPaPb \\
f(aIcPb, R_2)=aPcPb \\
f(bPaIc, R_2)=bPaPc \\
f(bIcPa, R_2)=bPcPa \\
f(aPbIc, R_2)=aPbPc \\
f(aPbPc, R_2)=aPbPc \\
f(aPcPb, R_2)=aPcPb \\
f(bPaPc, R_2)=bPaPc \\
f(bPcPa, R_2)=bPcPa \\
f(cPaPb, R_2)=cPaPb \\
f(cPbPa, R_2)=cPbPa.
\end{gathered}
$$

Då uppfyller f V2 eftersom f(aIb)=aPb, f(aIc)=aPc och f(bIc)=bPc).

För att se att även V1 uppfylls av f antar vi att aPb ingår i f(R_1, R_2) samt att R_1 och R_1’ uppfyller klausulerna 1–3 i V1. Då är R_1 en av relationerna 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12 i Tabell 1.

Om R_1 är relation 1 och R_1’ uppfyller klausul 1 i V1, så är R_1’ en av relationerna 1, 6, 7 i Tabell 1. Men relation 6 uppfyller inte klausul 2 i V1. Alltså är R_1’ relation 1 eller 7. Men f(aPbIc, R_2’)=aPbPc. Alltså ingår aPb i f(R_1’, R_2’).

Om R_1 istället är relation 2 och R_1’ uppfyller klausul 1 och 2 i V1, så är R_1’ relation 2 eller 8. Men f(aPbPc, R_2’)=aPbPc. Alltså ingår aPb i f(R_1’, R_2’).

Om R_1 råkar vara relation 3 och R_1’ uppfyller klausulerna 1–3 i V1, så är R_1’ någon av relationerna 3, 4, 9, 12. Men för alla dessa gäller att aPb ingår i f(R_1’, R_2’).

Om R_1 istället skulle vara någon av relationerna 4, 7, 8, 9, 12 och R_1’ uppfyller klausulerna 1–3 i V1, så aP_1’b. Alltså ingår aPb i f(R_1’, R_2’)b.

Därmed har vi visat att f uppfyller V1–V3.

Vidare gäller detta för de funktioner som likt f genereras av ekvationerna g(aIbIc, R_2)=aPcPb, g(aIbIc, R_2)=bPaPc, g(aIbIc, R_2)=bPcPa, g(aIbIc, R_2)=cPaPb och g(aIbIc, R_2)=cPbPa.

Om vi vidare sätter f(aIbIc, R_2)=aIbPc, f är en P_1-projektion och V2 gäller, så

f(aIbPc, R_2)=aIbPc
f(cPaIb, R_2)=cPaIb
f(aIcPb, R_2)=aPcPb
f(bPaIc, R_2)=bPaPc
f(bIcPa, R_2)=bPcPa
f(aPbIc, R_2)=aPbPc
f(aPbPc, R_2)=aPbPc
f(aPcPb, R_2)=aPcPb
f(bPaPc, R_2)=bPaPc
f(bPcPa, R_2)=bPcPa
f(cPaPb, R_2)=cPaPb
f(cPbPa, R_2)=cPbPa.

Då uppfyller f V2 eftersom f(aIb)=aIb, f(aIc)=aPc och f(bIc)=bPc.

För att se att även V1 uppfylls av f antar vi att aPc ingår i f(R_1, R_2) samt att R_1 och R_1’ uppfyller klausulerna 1–3 i V1. Då är R_1 en av relationerna 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10 i Tabell 1.

Om R_1 är relation 1 och R_1’ uppfyller klausulerna 1–3 i V1, så är R_1’ relation 1 eller relation 7. I båda fallen får vi att aPc ingår i f(R_1’, R_2’).

Om R_1 istället är relation 4, så är R_1’ relation 9. Men då ingår aPc i f(R_1’, R_2’).

Om R_1 råkar vara relation 5, så är R_1’ någon av relationerna 2, 8, 10. Men då ingår aPc i f(R_1’, R_2’).

Om R_1 slutligen skulle vara någon av relationerna 2, 7, 8, 9, 10, så ingår aPc i R_1’. Men då ingår aPc i f(R_1’, R_2’).

Vidare gäller detta för alla funktioner som på samma sätt som f är genererade av ekvationerna g(aIbIc, R_2)=cPaIb, g(aIbIc, R_2)=aIcPb, g(aIbIc, R_2)=bPaIc, g(aIbIc, R_2)=bIcPa och g(aIbIc, R_2)=aPbIc. Därmed har vi bestämt alla funktioner som är förenliga med V1–V3.

3. Huvudresultat

Det är nu dags att visa att en kollektiv preferens genererad via lottdragning inte nödvändigtvis uppfyller villkor 1 och villkor 2. Det räcker med att betrakta fallet n=2.

Villkor 1. Antag att R_1=aIcPb, R_2=bPcPa, R_1’=cPaIb och R_2’=bPcPa samt att R=R_1 och att R’=R_2’. Detta är naturligtvis ett möjligt resultat av en lottdragning. Då är klausulerna 1–3 i villkor 1 uppfyllda om x=a, y=b och z=c men aPb och bP’a. Alltså uppfyller inte en kollektiv preferens genererad via lottdragning villkor 1.

Villkor 2. Antag att R_1=aIbPc, R_2=aPbPc, R_1’=cPaIb och R_2’=cPaPb samt att R=R_1 och att R’=R_2’. Även detta är ett möjligt resultat av en lottdragning. Då är försatsen i villkor 2 sann och eftersatsen falsk för x=a och y=b. Alltså uppfyller inte en kollektiv preferens genererad via lottdragning villkor 2.

Villkor 3 och 4 är naturligtvis uppfyllda om vi slumpvis låter R vara R_1 eller R_2.

Men som vi sett redan i inledningen är en lottdragning i många fall det enda rimliga sättet att generera en kollektiv preferens. Därför framstår villkoren 1 och 2 endast som försvarbara om man förutsätter att en kollektiv preferens skall vara värdet av en funktion vars värde kan förutses givet de ingående argumenten. En sådan förutsättning framstår dock som opåkallad.

Men därmed framstår Arrows möjlighetsteorem närmast som ett kuriosum.

Referenser

Arrow, Kenneth J. (1963). *Social Choice and Individual Values*, 2a uppl. Yale UP. (Referens 1)

Luce, R. Duncan och Howard Raiffa. (1957). *Games and Decisions*. John Wiley & Sons. (Referens 2)

Per-Erik Malmnäs
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
pererik.malmnas@gmail.com