Filosofiska Notiser

Årgång 4, Nr 1, Januari 2017

ISSN: 2002-0198

Hemsida: www.filosofiskanotiser.com

Värderelationer i Dyadisk Deontisk Logik

Daniel Rönnedal

Abstrakt
Det finns minst fem olika värderelationer: *bättre än*, *minst lika bra som*, *lika bra som*, *sämre än* och *minst lika dålig som*. Syftet med den här uppsatsen är att undersöka vilka formella egenskaper dessa relationer har och hur de förhåller sig till varandra i dyadisk deontisk logik. Vi bevisar fyra olika metateorem, som vart och ett innehåller en mängd satser som kan bevisas i dyadisk deontisk logik. Enligt det första teoremet är A bättre än B eller B bättre än A eller A och B lika bra (för alla A och B); och om A är bättre än B, så är B inte bättre än A och inte heller lika bra som A osv. Det andra teoremet handlar om vilka formella egenskaper de olika värderelationerna har. Vi bevisar t.ex. att alla värderelationer är transitiva, att *lika bra som* och *minst lika bra som* är reflexiva och att *bättre än* är asymmetrisk. Teorem tre visar att om två sakförhållanden A och B är lika bra, så står A i exakt samma värderelationer till andra sakförhållanden som B (och tvärtom). Teorem fyra visar att detsamma gäller för sakförhållanden som är nödvändigt ekvivalenta.

1. Introduktion

Det finns minst fem olika värderelationer: *bättre än*, *minst lika bra som*, *lika bra som*, *sämre än* och *minst lika dålig som*. Syftet med den här uppsatsen är att undersöka vilka formella egenskaper dessa relationer har och hur de förhåller sig till varandra i dyadisk deontisk logik. Vi bevisar fyra olika metateorem, som vart och ett innehåller en mängd satser som kan bevisas i dyadisk deontisk logik. Enligt det första teoremet är A bättre än B eller B bättre än A eller A och B lika bra (för alla A och B); och om A är bättre än B, så är B inte bättre än A och inte heller lika bra som A; om B är bättre än A, så är A inte bättre än B och inte heller lika bra som B osv. Det andra teoremet handlar om vilka formella egenskaper de olika värderelationerna har. Vi bevisar t.ex. att alla värderelationer är transitiva, att *lika bra som* och *minst lika bra som* är reflexiva och att *bättre än* är asymmetrisk. Teorem tre visar att om två sakförhållanden A och B är lika bra, så står A i exakt samma värderelationer till andra sakförhållanden som B (och tvärtom). Teorem fyra visar att detsamma gäller för sakförhållanden som är nödvändigt ekvivalenta.

Det tycks som om värdeuttrycken ”bättre än”, ”minst lika bra som”, ”lika bra som”, ”sämre än” och ”minst lika dålig som” kan användas i flera olika betydelser. I den här uppsatsen är vi intresserade av hur dessa uttryck kan definieras i s.k. dyadisk deontisk logik. De definitioner vi använder är kanske inte uppenbart korrekta vid en första anblick. Men de teorem vi kan härleda med hjälp av dessa definitioner är intuitivt mycket rimliga. Definitionernas fruktbarhet avgörs delvis av vilka konsekvenser de har. Våra system tycks inte omedelbart lämpa sig för att symbolisera alla typer av värdeuttryck. När vi säger att A är bättre än B i den här uppsatsen, så menar vi att A är moraliskt bättre än B allt taget i beaktande; och på samma sätt förhåller det sig med de övriga värdeuttrycken.

Dyadisk deontisk logik är en typ av deontisk logik som innehåller särskilda symboler som kan användas för att analysera villkorliga normer av formen: ”Det bör vara fallet att A givet att B är fallet”, ”Det är tillåtet att A givet att B är fallet” och ”Det är förbjudet att A givet att B är fallet”. Dessa symboler kan sedan användas i definitionerna av våra olika värdeuttryck.

Nicholas Rescher (1958), Georg Henrik von Wright (1964), Sven Danielsson (1968), Bengt Hansson (1969), Bas van Fraassen (1972), (1973), David Lewis (1973), (1974), Frans von Kutschera (1974) och Lennart Åqvist (1971), (1973), (1987), är några av pionjärerna inom denna gren av logiken. I den här uppsatsen kommer vi att använda ett system som kallas ”TG” i Rönnedal (2009b) för att bevisa våra olika teorem. För mer information om detta system, och om dyadisk deontisk logik i allmänhet, se Rönnedal (2009b), (2012), (2015); se också Rönnedal (2009).[1]

Uppsatsen är indelad i tre avsnitt. Avsnitt 2 innehåller en introduktion till det dyadiska systemet TG, som vi använder i den här uppsatsen för att härleda olika satser. I avsnitt 3 bevisar jag fyra intressanta metateorem, som handlar om vilka formella egenskaper de olika värderelationerna har och hur de förhåller sig till varandra. Innehållet i dessa teorem har redan beskrivits ovan.

[1] Det kan finnas många olika skäl att studera dyadisk deontisk logik, förutom att det går att formulera intressanta definitioner av våra olika värdeuttryck i denna typ av logik. I Rönnedal (2009b) nämner jag några. Det kanske viktigaste skälet är att vi tycks behöva någon form av dyadisk deontisk logik för att lösa Roderick M. Chisholms s.k. ”contrary-to-duty” paradox (se Chisholm (1963)). (Se också Prior (1954).) För mer information, se Rönnedal (2012, ss. 112–118); se också Rönnedal (2012, ss. 118–121).

2. Dyadisk deontisk logik

Det här avsnittet innehåller en sammanfattning av den syntax, semantik och bevisteori vi använder i den här uppsatsen (för en mer utförlig framställning av dyadisk deontisk logik och systemet TG, se Rönnedal (2009b) eller Rönnedal (2012)).

2.1 Syntax

Språket L2 består av följande alfabet och satser.

Alfabet

En mängd satsbokstäver p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2, …
De satslogiska konnektiven $\neg$ (negation), $\wedge$ (konjunktion), $\vee$ (disjunktion), $\rightarrow$ (materiell implikation) och $\leftrightarrow$ (materiell ekvivalens).
Tre deontiska operatorer O, P och F.
$\top$ (verum), $\bot$ (falsum), parenteser), (,] och [.
Tre aletiska operatorer $\Box$ (nödvändighet), $\Diamond$ (möjlighet) och $\ominus$ (omöjlighet).

Satser

Språket L2 består av alla satser eller välformade formler (vff) som genereras från följande villkor.

Alla satsbokstäver, $\top$ och $\bot$ är satser.
Om A är en sats, så är $\neg$A en sats.
Om A och B är satser, så är (A $\wedge$ B), (A $\vee$ B), (A $\rightarrow$ B) och (A $\leftrightarrow$ B) satser.
Om A och B är satser, så är också O[A]B, P[A]B och F[A]B satser.
Ingenting annat är en sats.

A, B, C, D… representerar godtyckliga satser i språket (inte nödvändigtvis atomära). Parenteser runt välformade formler utelämnas i regel om ingen mångtydighet uppstår eller om den mångtydighet som uppstår är irrelevant i sammanhanget. De ”dyadiska” satserna i språket läses på följande sätt.

O[B]A: Det är obligatoriskt att A givet B.
P[B]A: Det är tillåtet att A givet B.
F[B]A: Det är förbjudet att A givet B.

Definitioner

$OA =_{df} O[\top]A$. $PA =_{df} P[\top]A$. $FA =_{df} F[\top]A$. $UA =_{df} U[\top]A$. $U[B]A =_{df} \neg O[B]A$. $K[B]A =_{df} P[B]A \wedge P[B]\neg A$. $N[B]A =_{df} \neg K[B]A$ $(O[B]A \vee O[B]\neg A)$. $O'[B]A =_{df} P[B]\top \wedge O[B]A$. $P'[B]A =_{df} \neg O'[B]\neg A$ $(O[B]\bot \vee P[B]A)$. $F'[B]A =_{df} \neg P'[B]A$ $(O'[B]\neg A$ eller $(P[B]\top \wedge F[B]A))$. $A \geq B =_{df} O[A \vee B]\bot \vee P[A \vee B]A$ $(P[A \vee B]\top \rightarrow P[A \vee B]A$ eller $P'[A \vee B]A)$. $A > B =_{df} P[A \vee B]\top \wedge O[A \vee B]\neg B$ $(O'[A \vee B]\neg B)$. $A = B =_{df} O[A \vee B]\bot \vee (P[A \vee B]A \wedge P[A \vee B]B)$ $(P'[A \vee B]A \wedge P'[A \vee B]B)$. $A < B =_{df} P[B \vee A]\top \wedge O[B \vee A]\neg A$ $(O'[B \vee A]\neg A$ eller $B > A)$. $A \leq B =_{df} O[B \vee A]\bot \vee P[B \vee A]B$ $(P[B \vee A]\top \rightarrow P[B \vee A]B$, $P'[B \vee A]B$ eller $B \geq A)$. ”$A > B$” läses ”A är bättre än B”, ”$A \geq B$” ”A är minst lika bra som B”, ”$A = B$” ”A är lika bra som B”, ”$A < B$” ”A är sämre än B”, och ” $A \leq B$” ”A är minst lika dålig som B”. Vi skall säga att >, ≥, =, ≤ och < är värdeoperatorer, och vi kallar ”$A > B$”, ”$A \geq B$” osv. värdesatser, ”A” försats och ”B” eftersats.

2.2 Semantik

Vi använder samma semantik i den här uppsatsen som i Rönnedal (2009b). Där introduceras två typer av ramar och modeller. De s.k. utvidgade ramarna och modellerna innehåller en preferensrelation mellan möjliga världar, en preferensrelation som används i definitionen av sanningsvillkoren för språkets olika satser. Informellt: Det är sant att det är obligatoriskt att A givet B (O[B]A) om och endast om (omm) A är sann i alla de bästa B-världarna, där en B-värld är en möjlig värld i vilken B är sann. Det är sant att det är tillåtet att A givet B (P[B]A) omm A är sann i minst en av de bästa B-världarna. Och det är sant att det är förbjudet att A givet B (F[B]A) omm A inte är sann i någon av de bästa B-världarna.

2.3 Bevisteori

Vi använder samma tablåmetod i den här uppsatsen som i Rönnedal (2009b) och (2012). Vill vi bevisa en sats A, så skapar vi en semantisk tablå för negationen av A. Är alla grenar i denna tablå slutna, så är A giltig. Intuitivt innebär detta att antagandet att A är falsk leder till en motsägelse, varför A måste vara sann. Vi använder genomgående systemet TG i våra bevis. Detta är det starkaste systemet som beskrivs i Rönnedal (2009b) och det innehåller alla tablåregler som presenteras i denna uppsats. Många av de satser vi undersöker kan emellertid även bevisas i svagare system.[2]

[2] För mer information om tablåmetoden, se t.ex. Beth (1955), (1959), D'Agostino, Gabbay, Hähnle & Posegga (red.) (1999), Fitting (1972), (1983), (1999), Jeffrey (1967), Kripke (1959), Priest (2008), Rönnedal (2009), (2009b), (2012), Smullyan (1963), (1965), (1966), (1968).

3. Några teorem

I det här avsnittet skall vi bevisa några teorem som handlar om hur värdeuttrycken ”bättre än”, ”minst lika bra som”, ”lika bra som” osv. förhåller sig till varandra och vilka formella egenskaper de olika värderelationerna har.

Avsnittet innehåller fyra teorem, och varje teorem innehåller en mängd delsatser. Jag kommer inte att gå igenom varje enskilt bevis, men jag kommer att ta upp några exempel för att belysa bevismetoden. Det första teoremet visar att alla par av satser i TG kan delas in i tre uttömmande och ömsesidigt uteslutande kategorier. Det är antingen fallet att A är bättre än B eller att B är bättre än A eller att A och B är lika bra, och om A är bättre än B, så är B inte bättre än A och inte heller lika bra som A, osv. Teorem 2 handlar om de formella egenskaperna hos de olika värderelationerna. Teoremet visar t.ex. att *lika bra som* är en ekvivalensrelation, att *bättre än* och *minst lika bra som* är transitiva, och att *minst lika bra som* är reflexiv medan *bättre än* är irreflexiv. Teorem 3 visar att om A och B är lika bra, så kan A bytas ut mot B både i försats och eftersats i varje värdesats med bevarat sanningsvärde. Teorem 4 visar att samma sak gäller om A och B är nödvändigt ekvivalenta.

<table>
<tr><td colspan="2">(4) $A \geq B$ $(B \leq A)$</td><td>(5) $(B \geq A) \wedge \neg(A = B)$</td></tr>
<tr><td>(1) $A > B$ $(B < A)$</td><td>(2) $A = B$</td><td>(3) $B > A$ $(A < B)$</td></tr>
<tr><td>(6) $(A \geq B) \wedge \neg(A = B)$</td><td colspan="2">(7) $B \geq A$ $(A \leq B)$</td></tr>
</table>

Tabell 1

Teorem 1. Låt (1), (2), (3) etc. referera till rutorna (1), (2), (3) etc. i tabell 1 eller till satserna i dessa rutor. Då gäller följande. **(i)** (1), (3), (4), och (7) innehåller två satser var. Satsen inom parentes är logiskt ekvivalent med satsen som inte är inom parentes. $A > B$ är t.ex. logiskt ekvivalent med $B < A$. Dvs. A är bättre än B om och endast om B är sämre än A. Denna del visar att $<$ är konversen till $>$ (och vice versa) och att $\geq$ är konversen till $\leq$ (och vice versa). **(ii)** Varje par av sakförhållanden är inkluderat i en och endast en av rutorna (1), (2), eller (3). Det betyder att t.ex. $(A > B) \vee (B > A) \vee (A = B)$ är ett teorem; och om en av disjunkterna i denna sats är sann, så är de andra falska. Dvs. A är bättre än B, eller B är bättre än A eller, A och B är lika bra; och om A är bättre än B, så är det inte fallet att B är bättre än A och det är inte fallet att A och B är lika bra, etc. **(iii)** $(4) \leftrightarrow ((1) \vee (2))$ och $(7) \leftrightarrow ((2) \vee (3))$ är teorem. Det här innebär att t.ex. $(A \geq B) \leftrightarrow ((A > B) \vee (A = B))$ är ett teorem. Dvs. A är minst lika bra som B om och endast om A är bättre än B eller A är lika bra som B. **(iv)** (3)$\leftrightarrow$(5) och (1)$\leftrightarrow$(6) är teorem. Det här innebär t.ex. att $(A>B)\leftrightarrow((A\geq B)\wedge\neg(A=B))$ är ett teorem. Dvs. A är bättre än B om och endast om A är minst lika bra som B men inte lika bra som B. **(v)** Följande samband gäller: (1)$\leftrightarrow\neg$(7), (6)$\leftrightarrow\neg$(7), (3)$\leftrightarrow\neg$(4), (4)$\leftrightarrow\neg$(5), (4)$\vee$(7), (2) $\leftrightarrow$((4)$\wedge$(7)).

Bevis. För att bevisa detta teorem visar vi att alla satserna i tabell 2 till 8 är härledbara i TG. Vi går igenom några exempel och lämnar resten till läsaren. Satserna i tabell 3 visar att (1), (2) och (3) är uttömmande, och satserna i tabell 4 visar att (1), (2) och (3) är ömsesidigt uteslutande.

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(A > B)\leftrightarrow(B < A)$	A är bättre än B omm B är sämre än A.
(ii)	$(A \geq B)\leftrightarrow(B \leq A)$	A är minst lika bra som B omm B är minst lika dålig som A.

Tabell 2

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(A > B) \vee (B > A) \vee (A = B)$	A är bättre än B eller B är bättre än A eller A är lika bra som B.
(ii)	$(B < A) \vee (B > A) \vee (A = B)$	B är sämre än A eller B är bättre än A eller A är lika bra som B.
(iii)	$(A < B) \vee (B < A) \vee (A = B)$	A är sämre än B eller B är sämre än A eller A är lika bra som B.
(iv)	$(B > A) \vee (B < A) \vee (A = B)$	B är bättre än A eller B är sämre än A eller A är lika bra som B.

Tabell 3

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(A > B) \rightarrow \neg(B > A)$	Om A är bättre än B, så är B inte bättre än A.
(ii)	$(A > B) \rightarrow \neg(A < B)$	Om A är bättre än B, så är A inte sämre än B.
(iii)	$(A > B) \rightarrow \neg(A = B)$	Om A är bättre än B, så är A inte lika bra som B.
(iv)	$(A < B) \rightarrow \neg(A > B)$	Om A är sämre än B, så är A inte bättre än B.
(v)	$(A < B) \rightarrow \neg(B < A)$	Om A är sämre än B, så är B inte sämre än A.
(vi)	$(A < B) \rightarrow \neg(A = B)$	Om A är sämre än B, så är A inte lika bra som B.
(vii)	$(A = B) \rightarrow \neg(A > B)$	Om A är lika bra som B, så är A inte bättre än B.
(viii)	$(A = B) \rightarrow \neg(A < B)$	Om A är lika bra som B, så är A inte sämre än B.
(ix)	$(A = B) \rightarrow \neg(B < A)$	Om A är lika bra som B, så är B inte sämre än A.
(x)	$(A = B) \rightarrow \neg(B > A)$	Om A är lika bra som B, så är B inte bättre än A.

Tabell 4

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(A > B) \rightarrow (A \geq B)$	Om A är bättre än B, så är A minst lika bra som B.
(ii)	$(A = B) \rightarrow (A \geq B)$	Om A är lika bra som B, så är A minst lika bra som B.
(iii)	$(A < B) \rightarrow (A \leq B)$	Om A är sämre än B, så är A minst lika dålig som B.
(iv)	$(A = B) \rightarrow (A \leq B)$	Om A är lika bra som B, så är A minst lika dålig som B.

Tabell 5

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(B \geq A) \leftrightarrow ((B > A) \vee (A = B))$	B är minst lika bra som A omm B är bättre än A eller A är lika bra som B.
(ii)	$(B \geq A) \leftrightarrow ((A < B) \vee (A = B))$	B är minst lika bra som A omm A är sämre än B eller A är lika bra som B.
(iii)	$(A \leq B) \leftrightarrow ((B > A) \vee (A = B))$	A är minst lika dålig som B omm B är bättre än A eller A är lika bra som B.
(iv)	$(A \leq B) \leftrightarrow ((A < B) \vee (A = B))$	A är minst lika dålig som B omm A är sämre än B eller A är lika bra som B.

Tabell 6

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(A > B) \leftrightarrow ((A \geq B) \wedge \neg(A = B))$	A är bättre än B omm A är minst lika bra som B och A inte är lika bra som B.
(ii)	$(A > B) \leftrightarrow ((B \leq A) \wedge \neg(A = B))$	A är bättre än B omm B är minst lika dålig som A och A inte är lika bra som B.
(iii)	$(A < B) \leftrightarrow ((B \geq A) \wedge \neg(A = B))$	A är sämre än B omm B är minst lika bra som A och A inte är lika bra som B.
(iv)	$(A < B) \leftrightarrow ((A \leq B) \wedge \neg(A = B))$	A är sämre än B omm A är minst lika dålig som B och A inte är lika bra som B.

Tabell 7

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(A > B) \leftrightarrow \neg(B \geq A)$	A är bättre än B omm B inte är minst lika bra som A.
(ii)	$(A < B) \leftrightarrow \neg(B \leq A)$	A är sämre än B omm B inte är minst lika dålig som A.
(iii)	$(A \geq B) \vee (B \geq A)$	A är minst lika bra som B eller så är B minst lika bra som A.
(iv)	$(A \leq B) \vee (B \leq A)$	A är minst lika dålig som B eller så är B minst lika dålig som A.
(v)	$(A = B) \leftrightarrow ((A \geq B) \wedge (B \geq A))$	A är lika bra som B omm A är minst lika bra som B och B är minst lika bra som A.
(vi)	$(A = B) \leftrightarrow ((A \leq B) \wedge (B \leq A))$	A är lika bra som B omm A är minst lika dålig som B och B är minst lika dålig som A.

Tabell 8

$(A>B)\leftrightarrow\neg(B\geq A) = (P[A\vee B]\top\wedge O[A\vee B]\neg B)\rightarrow\neg(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)$

(1) $\neg((P[A\vee B]\top\wedge O[A\vee B]\neg B)\rightarrow\neg(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)), 0$

(2) $P[A\vee B]\top\wedge O[A\vee B]\neg B, 0$ [1, $\neg\rightarrow$]

(3) $\neg\neg(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B), 0$ [1, $\neg\rightarrow$]

(4) $P[A\vee B]\top, 0$ [2, $\wedge$]

(5) $O[A\vee B]\neg B, 0$ [2, $\wedge$]

(6) $O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B, 0$ [3, $\neg\neg$]

(7) $\Box((A\vee B)\leftrightarrow(B\vee A)), 0$ [GA]

(8) $P[B\vee A]\top, 0$ [4, 7, DR1]

(9) $O[B\vee A]\neg B, 0$ [5, 7, DR1]

↙ ↘

(10) $O[B\vee A]\bot, 0$ [6, $\vee$]	(11) $P[B\vee A]B, 0$ [6, $\vee$]
(12) $0r_{B\vee A}1$ [8, P]	(13) $0r_{B\vee A}1$ [11, P]
(14) $\top, 1$ [8, P]	(15) $B, 1$ [11, P]
(16) $\bot, 1$ [10, 12, O]	(17) $\neg B, 1$ [9, 13, O]
(18) * [16]	(19) * [15, 17]

$(A\geq B)\vee(B\geq A) = (O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\vee(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)$

(1) $\neg((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\vee(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)), 0$

(2) $\neg(O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A), 0$ [1, $\neg\vee$]

(3) $\neg(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B), 0$ [1, $\neg\vee$]

(4) $\neg O[A\vee B]\bot, 0$ [2, $\neg\vee$]

(5) $\neg P[A\vee B]A, 0$ [2, $\neg\vee$]

(6) $\neg O[B\vee A]\bot, 0$ [3, $\neg\vee$]

(7) $\neg P[B\vee A]B, 0$ [3, $\neg\vee$]

(8) $P[A\vee B]\neg\bot, 0$ [4, $\neg$O]

(9) $O[A\vee B]\neg A, 0$ [5, $\neg$P]

(10) $P[B\vee A]\neg\bot, 0$ [6, $\neg$O]

(11) $O[B\vee A]\neg B, 0$ [7, $\neg$P]

(12) $0r_{A\vee B}1$ [8, P]

(13) $\neg\bot, 1$ [8, P]

(14) $\neg A, 1$ [9, 12, O]

(15) $A\vee B, 1$ [12, Tα1]

(16) $\Box((A\vee B)\leftrightarrow(B\vee A)), 0$ [GA]

(17) $O[A\vee B]\neg B, 0$ [11, 16, DR2]

(18) $\neg B, 1$ [12, 17, O]

↙ ↘

(19) $A, 1$ [15, $\vee$]	(20) $B, 1$ [15, $\vee$]
(21) * [14, 19]	(22) * [18, 20]

"GA" i bevisen ovan står för regeln the Global Assumption Rule. Se Rönnedal (2009b) för mer information om denna regel.

$(A=B)\leftrightarrow((A\geq B)\wedge(B\geq A)) = (O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))\leftrightarrow((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B))$

Om det är logisk sant att A implicerar B och det är logiskt sant att B implicerar A, så är det logiskt sant att A och B är ekvivalenta. Så för att bevisa att A och B är logiskt ekvivalenta, kan vi först bevisa att A implicerar B och sedan att B implicerar A. Vi använder denna strategi för att bevisa sats (v) i tabell 8. Eftersom $(A=B)\leftrightarrow((A\geq B)\wedge(B\geq A))$ per definition är logiskt ekvivalent med $(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))\leftrightarrow((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B))$, bevisar vi först att $(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))$ medför $(O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)$, och sedan att $(O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)$ medför $O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)$.

Vänster till höger.

$\neg((O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))\rightarrow$
$((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)))$, 0
$(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))$, 0
$\neg((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B))$, 0

$\swarrow$	$\searrow$
$\neg(O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)$, 0	$\neg(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)$, 0
$\neg O[A\vee B]\bot$, 0	$\neg O[B\vee A]\bot$, 0
$\neg P[A\vee B]A$, 0	$\neg P[B\vee A]B$, 0
$P[A\vee B]\neg\bot$, 0	$P[B\vee A]\neg\bot$, 0
$O[A\vee B]\neg A$, 0	$O[B\vee A]\neg B$, 0
$0r_{A\vee B}1$	$\Box((A\vee B)\leftrightarrow(B\vee A))$, 0
$\neg\bot$, 1	

$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$	$\searrow$
$O[A\vee B]\bot$, 0	$P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B$, 0	$O[A\vee B]\bot$, 0	$P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B$, 0
$\bot$, 1	$P[A\vee B]A$, 0	$P[A\vee B]\neg\bot$, 0	$P[A\vee B]A$, 0
*	$P[A\vee B]B$, 0	$0r_{A\vee B}1$	$P[A\vee B]B$, 0
	$0r_{A\vee B}2$	$\neg\bot$, 1	$O[A\vee B]\neg B$, 0
	A, 2	$\bot$, 1	$0r_{A\vee B}1$
	$\neg$A, 2	*	B, 1
	*		$\neg$B, 1
			*

Höger till vänster.

$(1)\ \neg(((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B))\rightarrow(O[A\vee B]\bot\vee (P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))),\ 0$

$(2)\ ((O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A)\wedge(O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B)),\ 0\ [1]$

$(3)\ \neg(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)),\ 0\ [1, \neg\rightarrow]$

$(4)\ O[A\vee B]\bot\vee P[A\vee B]A,\ 0\ [2, \wedge]$

$(5)\ O[B\vee A]\bot\vee P[B\vee A]B,\ 0\ [2, \wedge]$

$(6)\ \neg O[A\vee B]\bot,\ 0\ [3, \neg\vee]$

$(7)\ \neg(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B),\ 0\ [3, \neg\vee]$

$(8)\ P[A\vee B]\neg\bot,\ 0\ [6, \neg O]$

$(9)\ 0r_{A\vee B}1\ [8, P]$

$(10)\ \neg\bot,\ 1\ [8, P]$

$(11)\ \Box((A\vee B)\leftrightarrow(B\vee A)),\ 0\ [GA]$

↙ ↘

$(12)\ O[A\vee B]\bot,\ 0\ [4, \vee]$ | $(13)\ P[A\vee B]A,\ 0\ [4, \vee]$

$(14)\ \bot,\ 1\ [9, 12, O]$ | ↙ ↘

$(15)\ *\ [14]$ | $(16)\ O[B\vee A]\bot,\ 0\ [5, \vee]$ | $(17)\ P[B\vee A]B,\ 0\ [5, \vee]$

$(18)\ O[A\vee B]\bot,\ 0\ [11, 16]$ | $(19)\ P[A\vee B]B,\ 0\ [11, 17]$

$(20)\ \bot,\ 1\ [9, 18, O]$ | ↙ ↘

$(21)\ *\ [20]$ | $(22)\ \neg P[A\vee B]A,\ 0$ | $(23)\ \neg P[A\vee B]B,\ 0$

$(24)\ *\ [13, 22]$ | $(25)\ *\ [19, 23]$ ■

Vi skall nu säga något om de formella egenskaperna hos våra värderelationer. Låt R vara en relation. Då gäller det att R är reflexiv omm ARA; R är irreflexiv omm ¬ARA; R är symmetrisk omm ARB → BRA; R är asymmetrisk omm ARB→¬BRA; R är transitiv omm (ARB∧BRC)→ARC; R är ”antisymmetrisk” omm (ARB ∧ BRA) → (A = B); R är Euklidisk omm (ARB∧ARC)→BRC.

Teorem 2. **(i)** *Lika bra som* (=) är en ekvivalensrelation: den är reflexiv, symmetrisk och transitiv. *Lika bra som* (=), *minst lika bra som* (≥), och *minst lika dålig som* (≤) är reflexiva relationer. *Bättre än* (>) och *sämre än* (<) är irreflexiva relationer. *Lika bra som* (=) är symmetrisk, och *bättre än* (>) och *sämre än* (<) är asymmetriska. *Minst lika bra som* (≥), och *minst lika dålig som* (≤), är varken symmetriska eller asymmetriska. Alla värderelationer är transitiva. *Lika bra som* är ”antisymmetrisk” och Euklidisk. **(ii)** Alla satser i tabell 10 är teorem i TG. Del (ii) i detta teorem säger något om hur de olika värderelationerna är relaterade till varandra.

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$A = A$	A är lika bra som A.
(ii)	$A \geq A$	A är minst lika bra som A.
(iii)	$A \leq A$	A är minst lika dålig som A.
(iv)	$\neg(A > A)$	A är inte bättre än A.
(v)	$\neg(A < A)$	A är inte sämre än A.
(vi)	$(A = B) \rightarrow (B = A)$	Om A är lika bra som B, så är B lika bra som A.
(vii)	$(A > B) \rightarrow \neg(B > A)$	Om A är bättre än B, så är B inte bättre än A.
(viii)	$(A < B) \rightarrow \neg(B < A)$	Om A är sämre än B, så är B inte sämre än A.
(ix)	$((A > B) \wedge (B > C)) \rightarrow (A > C)$	Om A är bättre än B och B är bättre än C, så är A bättre än C.
(x)	$((A < B) \wedge (B < C)) \rightarrow (A < C)$	Om A är sämre än B och B är sämre än C, så är A sämre än C.
(xi)	$((A \geq B) \wedge (B \geq C)) \rightarrow (A \geq C)$	Om A är minst lika bra som B och B är minst lika bra som C, så är A minst lika bra som C.
(xii)	$((A \leq B) \wedge (B \leq C)) \rightarrow (A \leq C)$	Om A är minst lika dålig som B och B är minst lika dålig som C, så är A minst lika dålig som C.
(xiii)	$((A = B) \wedge (B = C)) \rightarrow (A = C)$	Om A är lika bra som B och B är lika bra som C, så är A lika bra som C.
(xiv)	$((A = B) \wedge (A = C)) \rightarrow (B = C)$	Om A är lika bra som B och A är lika bra som C, så är B lika bra som C.
(xv)	$((A = C) \wedge (B = C)) \rightarrow (A = B)$	Om A är lika bra som C och B är lika bra som C, så är A lika bra som B.

Tabell 9

Vi har sagt att ”A = B” läses ”A är lika bra som B”. Men eftersom lika bra är en ekvivalensrelation, kan ”A = B” lika gärna läsas ”A och B är lika bra” eller t.o.m. ”B är lika bra som A” och ”B och A är lika bra”. ”A = B” kan också läsas ”A är lika dålig som B”, ”A och B är lika dåliga” etc. Om någon säger att A är lika bra som B, så antyder detta att både A och B är bra (på någon absolut skala). Om någon säger att A är lika dålig som B, så antyder det att både A och B är dåliga (på någon absolut skala). Men det går att argumentera för att detta handlar om ett slags pragmatisk implikation istället för en semantisk skillnad mellan båda dessa uttryck. Enligt tabell 10 (ix) och (x) är *minst lika bra som*, och *minst lika dålig som* ”antisymmetriska”.

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$((A > B) \wedge (B = C)) \rightarrow (A > C)$	Om A är bättre än B och B är lika bra som C, så är A bättre än C.
(ii)	$((A < B) \wedge (B = C)) \rightarrow (A < C)$	Om A är sämre än B och B är lika bra som C, så är A sämre än C.
(iii)	$((A \geq B) \wedge (B > C)) \rightarrow (A > C)$	Om A är minst lika bra som B och B är bättre än C, så är A bättre än C.
(iv)	$((A \leq B) \wedge (B < C)) \rightarrow (A < C)$	Om A är minst lika dålig som B och B är sämre än C, så är A sämre än C.
(v)	$((A = B) \wedge (B > C)) \rightarrow (A > C)$	Om A är lika bra som B och B är bättre än C, så är A bättre än C.
(vi)	$((A = B) \wedge (B < C)) \rightarrow (A < C)$	Om A är lika bra som B och B är sämre än C, så är A sämre än C.
(vii)	$((A > B) \wedge (B \geq C)) \rightarrow (A > C)$	Om A är bättre än B och B är minst lika bra som C, så är A bättre än C.
(viii)	$((A < B) \wedge (B \leq C)) \rightarrow (A < C)$	Om A är sämre än B och B är minst lika dålig som C, så är A sämre än C.
(ix)	$((A \geq B) \wedge (B \geq A)) \rightarrow (A = B)$	Om A är minst lika bra som B och B är minst lika bra som A, så är A lika bra som B.
(x)	$((A \leq B) \wedge (B \leq A)) \rightarrow (A = B)$	Om A är minst lika dålig som B och B är minst lika dålig som A, så är A lika bra som B.

Tabell 10

Bevis. Alla satser i tabell 9 och 10 är intuitivt rimliga. Bevisen av flera av dessa teorem är emellertid inte triviala. Här är några exempel.

Tabell 9 (i) $(A=A) = O[A\vee A]\bot\vee(P[A\vee A]A\wedge P[A\vee A]A)$

$$
\begin{array}{c}
\neg(O[A\vee A]\bot\vee(P[A\vee A]A\wedge P[A\vee A]A)),\ 0\\
\neg O[A\vee A]\bot,\ 0\\
\neg(P[A\vee A]A\wedge P[A\vee A]A),\ 0\\
P[A\vee A]\neg\bot,\ 0\\
0r_{A\vee A}1\\
\neg\bot,\ 1\\
\swarrow \qquad \searrow\\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \neg P[A\vee A]A,\ 0\\ O[A\vee A]\neg A,\ 0\\ \neg A,\ 1\\ A\vee A,\ 1\\ \swarrow\quad\searrow\\ \begin{array}{cc} A,\ 1 & A,\ 1\\ * & * \end{array}\end{array} &
\begin{array}{c} \neg P[A\vee A]A,\ 0\\ O[A\vee A]\neg A,\ 0\\ \neg A,\ 1\\ A\vee A,\ 1\\ \swarrow\quad\searrow\\ \begin{array}{cc} A,\ 1 & A,\ 1\\ * & * \end{array}\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Tabell 9 (vii) $(A > B) \rightarrow \neg(B > A) =$
$(P[A\vee B]\top \wedge O[A\vee B]\neg B) \rightarrow \neg(P[B\vee A]\top \wedge O[B\vee A]\neg A)$

$$\begin{array}{c}
\neg((P[A\vee B]\top \wedge O[A\vee B]\neg B) \rightarrow \neg(P[B\vee A]\top \wedge O[B\vee A]\neg A)),\ 0 \\
P[A\vee B]\top \wedge O[A\vee B]\neg B,\ 0 \\
\neg\neg(P[B\vee A]\top \wedge O[B\vee A]\neg A),\ 0 \\
P[A\vee B]\top,\ 0 \\
O[A\vee B]\neg B,\ 0 \\
P[B\vee A]\top \wedge O[B\vee A]\neg A,\ 0 \\
P[B\vee A]\top,\ 0 \\
O[B\vee A]\neg A,\ 0 \\
\Box((A\vee B)\leftrightarrow(B\vee A)),\ 0 \\
O[A\vee B]\neg A,\ 0 \\
0r_{A\vee B}1 \\
\top,\ 1 \\
\neg A,\ 1 \\
\neg B,\ 1 \\
A\vee B,\ 1 \\
\swarrow \qquad \searrow \\
A,\ 1 \qquad\quad B,\ 1 \\
* \qquad\qquad\quad *
\end{array}$$

Tabell 9 (ix) $((A>B)\wedge(B>C))\rightarrow(A>C)$. Denna sats säger att relationen *bättre än* är transitiv. Teoremet är intuitivt tilltalande och det kan tyckas vara uppenbart sant. Beviset är emellertid inte alls trivialt. Som tur är kan vi använda oss av några resultat i Rönnedal (2015). $((A>B)\wedge(B>C))\rightarrow(A>C)$ är per definition ekvivalent med $(O'[A \vee B]\neg B \wedge O'[B \vee C]\neg C) \rightarrow O'[A \vee C]\neg C$. Och denna sats är i sin tur logiskt ekvivalent med satsen vF5, dvs. $O'[A \vee B]\neg B \rightarrow (O'[B \vee C]\neg C \rightarrow O'[A \vee C]\neg C)$, som bevisas i Rönnedal (2015). Det följer att $((A>B)\wedge(B>C))\rightarrow(A>C)$ är ett teorem i TG.

Tabell 10 (iii) $((A\geq B)\wedge(B>C))\rightarrow(A>C)$. Denna sats är per definition ekvivalent med $(P'[A\vee B]A\wedge O'[B\vee C]\neg C)\rightarrow O'[A\vee C]\neg C$, som i sin tur är logiskt ekvivalent med satsen vF6, $P'[A \vee B]A \rightarrow (O'[B \vee C]\neg C \rightarrow O'[A \vee C]\neg C)$, som bevisas i Rönnedal (2015). Det följer att $((A\geq B)\wedge(B>C))\rightarrow(A>C)$ är ett teorem i TG.

Tabell 10 (v) $((A=B)\wedge(B>C))\rightarrow(A>C)$. Vi har ovan bevisat att $(A=B)\leftrightarrow((A\geq B)\wedge(B\geq A))$ och $((A\geq B)\wedge(B>C))\rightarrow(A>C)$ är teorem i TG. Från detta följer det med hjälp av vanlig satslogik att $((A = B) \wedge (B > C)) \rightarrow (A > C)$, vilket vi enkelt kan bevisa i TG genom att tillämpa regeln Global Assumption (GA) (se Rönnedal (2009b)).

Tabell 10 (vii) $((A > B) \wedge (B \geq C)) \rightarrow (A > C)$. Denna sats är per definition ekvivalent med $(O'[A \vee B]\neg B \wedge P'[B \vee C]B) \rightarrow O'[A \vee C]\neg C$, som i sin tur är logiskt ekvivalent med vF7, $O'[A \vee B]\neg B \rightarrow (P'[B \vee C]B \rightarrow O'[A \vee C]\neg C)$, som bevisas i Rönnedal (2015). Det följer att $((A > B) \wedge (B \geq C)) \rightarrow (A > C)$ är ett teorem i TG. ■

Teorem 3. Låt © vara >, ≥, =, ≤ eller <. Då är alla instanser av $(A = B) \rightarrow ((A © C) \leftrightarrow (B © C))$ och $(A = B) \rightarrow ((C © A) \leftrightarrow (C © B))$ teorem i TG. Om A är lika bra som B, så kan A ersättas med B både i försats och eftersats i varje (komparativ) värdesats (med bevarat sanningsvärde). För att bevisa detta, måste vi visa att alla satser i tabell 11 är teorem i TG.

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(A = B) \rightarrow ((A \geq C) \leftrightarrow (B \geq C))$	Om A är lika bra som B, så är A minst lika bra som C omm B är minst lika bra som C.
(ii)	$(A = B) \rightarrow ((C \geq A) \leftrightarrow (C \geq B))$	Om A är lika bra som B, så är C minst lika bra som A omm C är minst lika bra som B.
(iii)	$(A = B) \rightarrow ((A > C) \leftrightarrow (B > C))$	Om A är lika bra som B, så är A bättre än C omm B är bättre än C.
(iv)	$(A = B) \rightarrow ((C > A) \leftrightarrow (C > B))$	Om A är lika bra som B, så är C bättre än A omm C är bättre än B.
(v)	$(A = B) \rightarrow ((A = C) \leftrightarrow (B = C))$	Om A är lika bra som B, så är A lika bra som C omm B är lika bra som C.
(vi)	$(A = B) \rightarrow ((C = A) \leftrightarrow (C = B))$	Om A är lika bra som B, så är C lika bra som A omm C är lika bra som B.
(vii)	$(A = B) \rightarrow ((A < C) \leftrightarrow (B < C))$	Om A är lika bra som B, så är A sämre än C omm B är sämre än C.
(viii)	$(A = B) \rightarrow ((C < A) \leftrightarrow (C < B))$	Om A är lika bra som B, så är C sämre än A omm C är sämre än B.
(ix)	$(A = B) \rightarrow ((A \leq C) \leftrightarrow (B \leq C))$	Om A är lika bra som B, så är A minst lika dålig som C omm B är minst lika dålig som C.
(x)	$(A = B) \rightarrow ((C \leq A) \leftrightarrow (C \leq B))$	Om A är lika bra som B, så är C minst lika dålig som A omm C är minst lika dålig som B.

Tabell 11

Bevis. Alla satser i tabell 11 är intuitivt rimliga. Bevisen är emellertid inte helt triviala. För den som är intresserad av att lära sig att handskas med systemet TG kan det vara en bra övning att härleda alla dessa satser (utan att använda GA). Tack vare regeln GA kan dock slutledningarna förenklas. Jag skall ta upp ett exempel för att illustrera metoden. Jag skall bevisa teorem (iii) i tabell 11.

(iii) $(A = B) \rightarrow ((A > C) \leftrightarrow (B > C))$. Vi har ovan bevisat satsen $((A = B) \wedge (B > C)) \rightarrow (A > C)$ (tabell 10 (v)) och vi har noterat att $(A = B) \rightarrow (B = A)$ (tabell 9 (vi)) är ett teorem i TG (beviset är relativt enkelt). $((A = B) \wedge (B > C)) \rightarrow (A > C)$ är logiskt ekvivalent med $(A = B) \rightarrow ((B > C) \rightarrow (A > C))$. Vi får alltså lägga till vilken instans som helst av dessa teorem på vilken öppen gren som helst i en TG-tablå. Vi använder oss av dessa hjälpsatser i beviset av (iii) nedan.

$$
\begin{array}{c}
\neg((A = B) \rightarrow ((A > C) \leftrightarrow (B > C))), 0 \\
A = B, 0 \\
\neg((A > C) \leftrightarrow (B > C)), 0 \\
(A = B) \rightarrow ((B > C) \rightarrow (A > C)), 0 \\
(B = A) \rightarrow ((A > C) \rightarrow (B > C)), 0 \\
(A = B) \rightarrow (B = A), 0 \\
B = A, 0 \\
(B > C) \rightarrow (A > C), 0 \\
(A > C) \rightarrow (B > C), 0 \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
A > C, 0 & \neg(A > C), 0 \\
\neg(B > C), 0 & B > C, 0 \\
B > C, 0 & A > C, 0 \\
* & *
\end{array}
\end{array}
$$

Nod (4), (5) och (6) i ovanstående tablå är instanser av de teorem vi har nämnt ovan. De introduceras med hjälp av GA. Övriga satser i tabell 11 kan bevisas på liknande sätt. ■

Låt oss ta upp ett annat teorem som påminner om teorem 3.

Teorem 4. Låt © vara >, ≥, =, ≤ eller <. Då är alla instanser av $\Box(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A © C) \leftrightarrow (B © C))$ och $\Box(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((C © A) \leftrightarrow (C © B))$ teorem i TG. Om A är nödvändigt ekvivalent med B, så kan A ersättas med B i försatsen och i eftersatsen i varje (komparativ) värdesats (med bevarat sanningsvärde) och tvärtom.

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((A\geq C)\leftrightarrow(B\geq C))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är A minst lika bra som C omm B är minst lika bra som C.
(ii)	$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((C\geq A)\leftrightarrow(C\geq B))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är C minst lika bra som A omm C är minst lika bra som B.
(iii)	$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((A>C)\leftrightarrow(B>C))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är A bättre än C omm B är bättre än C.
(iv)	$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((C>A)\leftrightarrow(C>B))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är C bättre än A omm C är bättre än B.
(v)	$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((A=C)\leftrightarrow(B=C))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är A lika bra som C omm B är lika bra som C.
(vi)	$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((C=A)\leftrightarrow(C=B))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är C lika bra som A omm C är lika bra som B.
(vii)	$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((A<C)\leftrightarrow(B<C))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är A sämre än C omm B är sämre än C.
(viii)	$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((C<A)\leftrightarrow(C<B))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är C sämre än A omm C är sämre än B.
(ix)	$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((A\leq C)\leftrightarrow(B\leq C))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är A minst lika dålig som C omm B är minst lika dålig som C.
(x)	$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((C\leq A)\leftrightarrow(C\leq B))$	Om det är nödvändigt att A omm B, så är C minst lika dålig som A omm C är minst lika dålig som B.

Tabell 12

Bevis. Vi bevisar del (i) och (ii) direkt. Därefter härleder vi ett par hjälpsatser som tillsammans med teoremen i tabell 11 kan användas för att bevisa alla satser i tabell 12.

(i) $\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((A\geq C)\leftrightarrow(B\geq C))$ =

$$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((O[A\vee C]\bot\vee P[A\vee C]A)\leftrightarrow(O[B\vee C]\bot\vee P[B\vee C]B))$$

$$\Box(A\leftrightarrow B),\ 0$$

$$\neg((O[A\vee C]\bot\vee P[A\vee C]A)\leftrightarrow(O[B\vee C]\bot\vee P[B\vee C]B)),\ 0$$

$$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow\Box((A\vee C)\leftrightarrow(B\vee C)),\ 0$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$O[A\vee C]\bot\vee P[A\vee C]A$	$\neg(O[A\vee C]\bot\vee P[A\vee C]A),\ 0$
$\neg(O[B\vee C]\bot\vee P[B\vee C]B),\ 0$	$O[B\vee C]\bot\vee P[B\vee C]B,\ 0$
$\neg O[B\vee C]\bot,\ 0$	$\neg O[A\vee C]\bot,\ 0$
$\neg P[B\vee C]B,\ 0$	$\neg P[A\vee C]A,\ 0$
$P[B\vee C]\neg\bot,\ 0$	$P[A\vee C]\neg\bot,\ 0$
$O[B\vee C]\neg B,\ 0$	$O[A\vee C]\neg A,\ 0$
$\Box((A\vee C)\leftrightarrow(B\vee C)),\ 0$	$\Box((A\vee C)\leftrightarrow(B\vee C)),\ 0$

$P[A\vee C]\neg\bot, 0 \qquad\qquad P[B\vee C]\neg\bot, 0$

$O[A\vee C]\neg B, 0 \qquad\qquad O[B\vee C]\neg A, 0$

$\swarrow \quad \searrow \qquad\qquad \swarrow \quad \searrow$

$O[A\vee C]\bot, 0 \quad P[A\vee C]A, 0 \qquad\qquad O[B\vee C]\bot, 0 \quad P[B\vee C]B, 0$

$0r_{A\vee C}1 \quad 0r_{A\vee C}1 \qquad\qquad 0r_{B\vee C}1 \quad 0r_{B\vee C}1$

$\neg\bot, 1 \quad A, 1 \qquad\qquad \neg\bot, 1 \quad B, 1$

$\bot, 1 \quad \neg B, 1 \qquad\qquad \bot, 1 \quad \neg A, 1$

$* \quad A\leftrightarrow B, 1 \qquad\qquad * \quad A\leftrightarrow B, 1$

$\quad * \qquad\qquad\qquad *$

(ii) $\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((C\geq A)\leftrightarrow(C\geq B)) =$

$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((O[C\vee A]\bot\vee P[C\vee A]C)\leftrightarrow(O[C\vee B]\bot\vee P[C\vee B]C))$

$\neg(\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow((O[C\vee A]\bot\vee P[C\vee A]C)\leftrightarrow(O[C\vee B]\bot\vee P[C\vee B]C))), 0$

$\Box(A\leftrightarrow B), 0$

$\neg((O[C\vee A]\bot\vee P[C\vee A]C)\leftrightarrow(O[C\vee B]\bot\vee P[C\vee B]C)), 0$

$\Box((A\leftrightarrow B)\rightarrow\Box((C\vee A)\leftrightarrow(C\vee B)), 0$

$\swarrow \qquad\qquad \searrow$

$O[C\vee A]\bot\vee P[C\vee A]C, 0 \qquad\qquad \neg(O[C\vee A]\bot\vee P[C\vee A]C), 0$

$\neg(O[C\vee B]\bot\vee P[C\vee B]C), 0 \qquad\qquad O[C\vee B]\bot\vee P[C\vee B]C, 0$

$\neg O[C\vee B]\bot, 0 \qquad\qquad \neg O[C\vee A]\bot, 0$

$\neg P[C\vee B]C), 0 \qquad\qquad \neg P[C\vee A]C, 0$

$P[C\vee B]\neg\bot, 0 \qquad\qquad P[C\vee A]\neg\bot, 0$

$O[C\vee B]\neg C, 0 \qquad\qquad O[C\vee A]\neg C, 0$

$\Box((C\vee A)\leftrightarrow(C\vee B)), 0 \qquad\qquad \Box((C\vee A)\leftrightarrow(C\vee B)), 0$

$\swarrow \quad \searrow \qquad\qquad \swarrow \quad \searrow$

$O[C\vee A]\bot, 0 \quad P[C\vee A]C, 0 \qquad\qquad O[C\vee B]\bot, 0 \quad P[C\vee B]C, 0$

$O[C\vee B]\bot, 0 \quad O[C\vee A]\neg C, 0 \qquad\qquad O[C\vee A]\bot, 0 \quad O[C\vee B]\neg C, 0$

$0r_{C\vee B}1 \quad 0r_{C\vee A}1 \qquad\qquad 0r_{C\vee A}1 \quad 0r_{C\vee B}1$

$\neg\bot, 1 \quad C, 1 \qquad\qquad \neg\bot, 1 \quad C, 1$

$\bot, 1 \quad \neg C, 1 \qquad\qquad \bot, 1 \quad \neg C, 1$

$* \quad * \qquad\qquad * \quad *$

Vi har nu sett hur man kan bevisa ett par teorem i tabell 12 utan att använda några hjälpsatser. När man väl har etablerat alla satser i tabell 11 finns det emellertid ett enklare sätt att härleda satserna i tabell 12. Först bevisar vi att $\Box(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A = B)$ är ett teorem. Sedan använder vi denna formel tillsammans med satserna i tabell 11 för att bevisa att alla satser i tabell 12 är teorem i TG. Detta steg i slutledningen är utomordentligt enkelt. Vi bevisar även följande teorem nedan: $\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(\neg A=\neg B)$.

$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(A=B) = \Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))$.

$$\neg(\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))), 0$$
$$\Box(A\leftrightarrow B), 0$$
$$\neg(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)), 0$$
$$\neg O[A\vee B]\bot, 0$$
$$\neg(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B), 0$$
$$P[A\vee B]\neg\bot, 0$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$

$\neg P[A\vee B]A, 0$	$\neg P[A\vee B]B, 0$
$O[A\vee B]\neg A, 0$	$O[A\vee B]\neg B, 0$
$0r_{A\vee B}1$	$0r_{A\vee B}1$
$\neg\bot, 1$	$\neg\bot, 1$
$\neg A, 1$	$\neg B, 1$
$A\vee B, 1$	$A\vee B, 1$
$\swarrow \qquad \searrow$	$\swarrow \qquad \searrow$

$A, 1$	$B, 1$	$A, 1$	$B, 1$
*	$A\leftrightarrow B, 1$	$A\leftrightarrow B, 1$	*
	$A, 1$	$B, 1$	
	*	*	

$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(\neg A=\neg B) =$
$\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(O[\neg A\vee\neg B]\bot\vee(P[\neg A\vee\neg B]\neg A\wedge P[\neg A\vee\neg B]\neg B))$.

$$\neg(\Box(A\leftrightarrow B)\rightarrow(O[\neg A\vee\neg B]\bot\vee(P[\neg A\vee\neg B]\neg A\wedge P[\neg A\vee\neg B]\neg B))), 0$$
$$\Box(A\leftrightarrow B), 0$$
$$\neg(O[\neg A\vee\neg B]\bot\vee(P[\neg A\vee\neg B]\neg A\wedge P[\neg A\vee\neg B]\neg B)), 0$$
$$\neg O[\neg A\vee\neg B]\bot$$
$$\neg(P[\neg A\vee\neg B]\neg A\wedge P[\neg A\vee\neg B]\neg B), 0$$
$$P[\neg A\vee\neg B]\neg\bot, 0$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$

$\neg P[\neg A\vee\neg B]\neg A, 0$	$\neg P[\neg A\vee\neg B]\neg B, 0$
$O[\neg A\vee\neg B]\neg\neg A, 0$	$O[\neg A\vee\neg B]\neg\neg B, 0$
$0r_{\neg A\vee\neg B}1$	$0r_{\neg A\vee\neg B}1$
$\neg\bot, 1$	$\neg\bot, 1$
$\neg\neg A, 1$	$\neg\neg B, 1$
$\neg A\vee\neg B, 1$	$\neg A\vee\neg B, 1$
$\swarrow \qquad \searrow$	$\swarrow \qquad \searrow$

$\neg A, 1$	$\neg B, 1$	$\neg A, 1$	$\neg B, 1$
*	$A\leftrightarrow B, 1$	$A\leftrightarrow B, 1$	*
	$\neg A, 1$	$\neg B, 1$	
	*	*	

Det är alltså sant att om A är nödvändigt ekvivalent med B, så är A och B lika bra; och inte-A är lika bra som inte-B givet att det är nödvändigt att A och B är ekvivalenta. ■

Referenser

Beth, E. W. (1955). Semantic Entailment and Formal Derivability. Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afdeling Letterkunde, N.S., vol. 18, nr. 13, Amsterdam, ss. 309–342. Publicerad på nytt i *Hintikka, J.* (1969), ss. 9–41.

Beth, E. W. (1959). *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam.

Chisholm, R. M. (1963). Contrary-to-duty Imperatives and Deontic Logic. *Analysis* 24, ss. 33–36.

D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle R. & Posegga J. (red.). (1999). *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Danielsson, S. (1968). *Preference and Obligation: Studies in the Logic of Ethics*. Filosofiska föreningen, Uppsala.

Fitting, M. (1972). Tableau methods of proof for modal logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 13, ss. 237–247.

Fitting, M. (1983). *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logic*. D. Reidel, Dordrecht.

Fitting, M. (1999). Introduction. I *D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle R. & Posegga J.* (red.). (1999), ss. 1–43.

Gabbay, D. & Guenthner F. (red.). (1984). *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 2, D. Reidel.

Gabbay, D. & Guenthner, F. (red.). (2002). *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. 8, D. Reidel.

Gabbay, D., Horty, J., Parent, X., van der Meyden, E. & van der Torre, L. (red.). (2013). *Handbook of Deontic Logic and Normative Systems*. College Publications.

Hansson, B. (1969). An Analysis of Some Deontic Logics. *Noûs* 3, ss. 373–398. Tryckt på nytt i Hilpinen, R. (red.). (1971), ss. 121–147.

Hilpinen, R. (red.). (1971). *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Hilpinen, R. (red.). (1981). *New Studies in Deontic Logic Norms, Actions, and the Foundation of Ethics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Hintikka, J. (1969). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford Readings in Philosophy, Oxford University Press, Oxford.

Jeffrey, R. C. (1967). *Formal Logic: Its Scope and Limits*. McGraw-Hill, New York.
Kripke, S. A. (1959). A Completeness Theorem in Modal Logic. *The Journal of Symbolic Logic* 24, ss. 1–14.
Lenk, H., & Berkemann J. (red.). (1974). *Normenlogik: Grundprobleme der deontischen Logik*. UTB, 414, Verlag Dokumentation, Pullach (near München).
Lewis, D. (1973). *Counterfactuals*. Basil Blackwell, Oxford.
Lewis, D. (1974). Semantic analysis for dyadic deontic logic. I *Stenlund, S.* (red.). (1974), ss. 1–14.
Mally, E. (1926). *Grundgesetze des Sollens Elemente der Logik des Willens*. Leuschner and Lubensky, Graz.
Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge University Press, Cambridge.
Prior, A. (1954). The Paradoxes of Derived Obligation. *Mind* 63, ss. 64–65.
Rescher, N. (1958). An axiom system for deontic logic. *Philosophical studies*, Vol. 9, ss. 24–30.
Rönnedal, D. (2009). Counterfactuals and Semantic Tableaux. *Logic and Logical Philosophy*, Vol. 18, Nr. 1, ss. 71–91.
Rönnedal, D. (2009b). Dyadic Deontic Logic and Semantic Tableaux. *Logic and Logical Philosophy*, Vol. 18, Nr. 3–4, ss. 221–252.
Rönnedal, D. (2010). *An Introduction to Deontic Logic*. Charleston, SC.
Rönnedal, D. (2012). *Extensions of Deontic Logic: An Investigation into some Multi-Modal Systems*, Department of Philosophy, Stockholm University.
Rönnedal, D. (2015). Dyadisk Deontisk Logik: En Härledning av Några Teorem. *Filosofiska Notiser*, Årgång 2, Nr. 2, ss. 19–52.
Smullyan, R. M. (1963). A unifying Principle in Quantificational Theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 49, 6, ss. 828–832.
Smullyan, R. M. (1965). Analytic Natural Deduction. *Journal of Symbolic Logic* 30, ss. 123–139.
Smullyan, R. M. (1966). Trees and Nest Structures. *Journal of Symbolic Logic* 31, ss. 303–321.
Smullyan, R. M. (1968). *First-Order Logic*. Heidelberg, Springer-Verlag.
Stenlund, S. (red.). (1974). *Logical Theory and Semantical Analysis*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
van Fraassen, B. C. (1972). The Logic of Conditional Obligation. *Journal of Philosophical Logic* 1, ss. 417–438.

van Fraassen, B. C. (1973). Values and the Heart's Command. *The Journal of Philosophy* LXX, ss. 5–19.

von Kutschera, F. (1974). Normative Präferenzen und bedingte Gebote. I *Lenk, H., & Berkemann J.* (red.). (1974), ss. 137–165.

von Wright, G. H. (1951). Deontic Logic. *Mind* 60, ss. 1–15.

von Wright, G. H. (1964). A new system of deontic logic. *Danish yearbook of philosophy*, Vol. 1, ss. 173–182.

Åqvist, L. (1971). Revised foundations for imperative-epistemic and interrogative logic. *Theoria*, Vol. 37, Nr. 1, ss. 33–73.

Åqvist, L. (1973). Modal Logic with Subjunctive Conditionals and Dispositional Predicates. *Journal of Philosophical Logic*. Vol. 2, Nr. 1, ss. 1–76.

Åqvist, L. (1984). Deontic Logic. I *Gabbay, D. & Guenthner F.* (red.). (1984), ss. 605–714.

Åqvist, L. (1987). *Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems*. Bibliopolis, Naples.

Åqvist, L. (2002). Deontic Logic. I *Gabbay, D. & Guenthner, F.* (red.). (2002), ss. 147–264.

Daniel Rönnedal
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
daniel.ronnedal@philosophy.su.se

Värderelationer och Monadiska Normer i Dyadisk Deontisk Logik

Daniel Rönnedal

Abstrakt
Syftet med den här uppsatsen är att undersöka vilka förhållanden som råder mellan värderelationerna *bättre än*, *minst lika bra som*, *lika bra som* etc. och monadiska normer av typen ”Det bör vara fallet att A”, ”Det är tillåtet att A” och ”Det är förbjudet att A” i dyadisk deontisk logik. Jag kommer att bevisa ett antal intressanta teorem och undersöka några argument som går ut på att vår underliggande logik är för stark och/eller för svag, dvs. att vi kan bevisa för många och/eller för få satser med dess hjälp. Jag argumenterar för att dessa argument inte är konklusiva.

1. Introduktion

Syftet med den här uppsatsen är att undersöka vilka förhållanden som råder mellan värderelationerna *bättre än*, *minst lika bra som*, *lika bra som* etc. och monadiska normer av typen ”Det bör vara fallet att A”, ”Det är tillåtet att A” och ”Det är förbjudet att A” i dyadisk deontisk logik. Jag kommer att bevisa ett antal intressanta teorem och undersöka några argument som går ut på att vår underliggande logik är för stark och/eller för svag, dvs. att vi kan bevisa för många och/eller för få satser med dess hjälp. Jag argumenterar för att dessa argument inte är konklusiva.

Många av de teorem vi bevisar i den här uppsatsen är intuitivt rimliga och förefaller vara förenliga med flera olika moralfilosofiska uppfattningar. Ett antal bevisbara satser har emellertid instanser som vid en första anblick kan tycks vara kontraintuitiva. Om några teorem har instanser som inte är sanna, så är antingen de definitioner av de olika värderelationerna vi introducerar i den här uppsatsen orimliga eller också måste vi förkasta den typ av dyadisk deontisk logik vi använder. Min hypotes är att förklaringen till att vissa teorem har instanser som kan tyckas vara kontraintuitiva vid en första anblick är att uttrycken ”bättre än”, ”minst lika bra som”, ”lika bra som” osv. kan användas i fler olika betydelse och att våra teorem är orimliga givet vissa tolkningar. Jag argumenterar emellertid för att definitionerna är plausibla, om

Filosofiska Notiser, Årgång 4, Nr. 1, Januari 2017, 25–57

de förstås på rätt sätt, och att våra intuitioner inte utgör ett tillräckligt skäl att förkasta den typ av dyadisk deontisk logik vi använder i den här uppsatsen.

Dyadisk deontisk logik är en typ av deontisk logik som innehåller särskilda symboler som kan användas för att analysera villkorliga normer av formen: ”Det bör vara fallet att A givet att B är fallet”, ”Det är tillåtet att A givet att B är fallet” och ”Det är förbjudet att A givet att B är fallet”. Med hjälp av dessa symboler kan vi sedan definiera ett antal satsoperatorer som kan användas för att symbolisera värdeuttrycken ”bättre än”, ”minst lika bra som”, ”lika bra som” osv., samt monadiska normativa satser av formen ”Det bör vara fallet att A”, ”Det är tillåtet att A” och ”Det är förbjudet att A”.

Sven Danielsson (1968), Bengt Hansson (1969), Bas van Fraassen (1972), (1973), David Lewis (1973), (1974), Frans von Kutschera (1974) och Lennart Åqvist (1971), (1973), (1987) är några av pionjärerna inom denna gren av logiken. Se också Rescher (1958) och von Wright (1964). Jag har i tidigare arbeten utvecklat en rad semantiska tablåsystem som bl.a. kan användas för att bevisa teorem och analysera och värdera argument i dyadisk deontisk logik (Rönnedal (2009b); se också Rönnedal (2009), (2012), (2015)). I den här uppsatsen använder vi ett av dessa system, det system som kallas ”TG” i Rönnedal (2009b), för att undersöka hur värderelationerna *bättre än*, *minst lika bra som*, *lika bra som* osv. förhåller sig till monadiska normativa satser av formen ”Det bör vara fallet att A”, ”Det är tillåtet att A” och ”Det är förbjudet att A” osv.[1]

Den här uppsatsen är indelad i fyra avsnitt. I avsnitt 2 presenterar jag det dyadiska systemet TG som vi använder i den här uppsatsen för att bevisa olika teorem. Avsnitt 3 innehåller bevis av en mängd intressanta satser som handlar om förhållandena mellan olika värderelationer och monadiska normer. I avsnitt 4 diskuterar jag ett antal argument som går ut på att TG, tillsammans med våra definitioner av uttrycken ”bättre än” osv., är för starkt och/eller för svagt. Jag argumenterar för att dessa inte är konklusiva.

2. Dyadisk deontisk logik

I det här avsnittet går vi igenom den syntax, semantik och bevisteori vi använder i den här uppsatsen (för en mer utförlig framställning av dyadisk

[1] I Rönnedal (2009b) nämner jag några filosofiska skäl varför det är önskvärt att studera dyadisk deontisk logik. Det kanske viktigaste skälet är att vi tycks behöva någon form av dyadisk deontisk logik för att lösa Roderick M. Chisholms s.k. ”contrary-to-duty” paradox (se Chisholm (1963)). (Se också Prior (1954).) Jag skall inte här ta upp detta problem; istället hänvisar jag den intresserade läsaren till Rönnedal (2012, ss. 112–118) för mer information (se också Rönnedal (2012, ss. 118–121) för ytterligare ett par skäl att vara intresserad av dyadisk deontisk logik).

deontisk logik och systemet TG, se Rönnedal (2009b) eller Rönnedal (2012); se också Rönnedal (2015)).

2.1 Syntax
Språket L2 består av följande alfabet och satser.

Alfabet

En mängd satsbokstäver p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2, …
De satslogiska konnektiven $\neg$ (negation), $\wedge$ (konjunktion), $\vee$ (disjunktion), $\rightarrow$ (materiell implikation) och $\leftrightarrow$ (materiell ekvivalens).
Tre deontiska operatorer O, P och F.
T (verum), $\perp$ (falsum), parenteser), (,] och [.
Tre aletiska operatorer $\Box$ (nödvändighet), $\Diamond$ (möjlighet) och $\ominus$ (omöjlighet).

Satser
Språket L2 består av alla satser eller välformade formler (vff) som genereras från följande villkor.

Alla satsbokstäver, T och $\perp$ är vff.
Om A är en sats, så är $\neg$A en sats.
Om A och B är satser, så är (A $\wedge$ B), (A $\vee$ B), (A $\rightarrow$ B) och (A $\leftrightarrow$ B) satser.
Om A och B är vff, så är också O[A]B, P[A]B och F[A]B vff.
Ingenting annat är en sats.

A, B, C, D… representerar godtyckliga satser i språket (inte nödvändigtvis atomära). Parenteser runt välformade formler utelämnas i regel om ingen mångtydighet uppstår eller om den mångtydighet som uppstår är irrelevant i sammanhanget. De ”dyadiska” satserna i språket läses på följande sätt.

O[B]A: Det är obligatoriskt att A givet B.
P[B]A: Det är tillåtet att A givet B.
F[B]A: Det är förbjudet att A givet B.

Definitioner
OA $=_{df}$ O[T]A. PA $=_{df}$ P[T]A. FA $=_{df}$ F[T]A. U[B]A $=_{df}$ $\neg$O[B]A. UA $=_{df}$ U[T]A. K[B]A $=_{df}$ P[B]A $\wedge$ P[B]$\neg$A. KA $=_{df}$ K[T]A. N[B]A $=_{df}$ $\neg$K[B]A

(eller $O[B]A \vee O[B]\neg A$). NA $=_{df}$ N[T]A. $O'[B]A =_{df} P[B]T \wedge O[B]A$. $P'[B]A =_{df} \neg O'[B]\neg A$ (eller $O[B]\perp \vee P[B]A$). $F'[B]A =_{df} \neg P'[B]A$ (eller $O'[B]\neg A$ eller $(P[B]T \wedge F[B]A)$). $A \geq B =_{df} O[A \vee B]\perp \vee P[A \vee B]A$ (eller $P[A \vee B]T \rightarrow P[A \vee B]A$ eller $P'[A \vee B]A$). $A > B =_{df} P[A \vee B]T \wedge O[A \vee B]\neg B$ (eller $O'[A \vee B]\neg B$). $A = B =_{df} O[A \vee B]\perp \vee (P[A \vee B]A \wedge P[A \vee B]B)$ (eller $P'[A \vee B]A \wedge P'[A \vee B]B$). $A < B =_{df} B > A$. $A \leq B =_{df} B \geq A$. ”$A > B$” läses ”A är bättre än B”, ”$A \geq B$” läses ”A är minst lika bra som B”, ”$A = B$” läses ”A är lika bra som B”, ”$A < B$” läses ”A är sämre än B”, och ” $A \leq B$” läses ”A är minst lika dålig som B”. När vi säger att A är bättre än B, i den här uppsatsen, menar vi att A är moraliskt bättre än B allt taget i beaktande; de övriga värdeuttrycken tolkas på samma sätt. När vi säger att något är obligatoriskt, menar vi att det är moraliskt obligatoriskt allt taget i beaktande. När vi säger att något är tillåtet, menar vi att det är moraliskt tillåtet allt taget i beaktande, osv.

2.2 Semantik

I Rönnedal (2009b) introduceras två typer av semantik. Vi använder exakt samma semantik i den här uppsatsen. De utvidgade ramarna och modellerna innehåller en preferensrelation mellan möjliga världar. Den intuitiva tanken är att det är sant att det är obligatoriskt att A givet B (O[B]A) om och endast om A är sann i alla de bästa B-världarna, där en B-värld är en möjlig värld i vilken B är sann. Det är sant att det är tillåtet att A givet B (P[B]A) om och endast om A är sann i minst en av de bästa B-världarna. Och det är sant att det är förbjudet att A givet B (F[B]A) om och endast om A inte är sann i någon av de bästa B-världarna.

2.3 Bevisteori

Vi använder exakt samma bevisteori i den här uppsatsen som i Rönnedal (2009b) och (2012). Denna teori bygger på s.k. semantiska tablåer. Om vi vill bevisa en sats A, så skapar vi en semantisk tablå för negationen av A. Om alla grenar i denna tablå är slutna, så är A giltig. Intuitivt innebär detta att antagandet att A är falsk leder till en motsägelse, varför A måste vara sann. Vi använder genomgående systemet TG i våra bevis. Detta är det starkaste systemet som beskrivs i Rönnedal (2009b) och det innehåller alla tablåregler som presenteras i denna uppsats. Många av de satser vi undersöker kan emellertid även bevisas i svagare system.[2]

---

[2] För mer information om tablåmetoden, se t.ex. Beth (1955), (1959), D’Agostino, Gabbay, Hähnle & Posegga (red.) (1999), Fitting (1972), (1983), (1999), Jeffrey (1967), Kripke (1959), Priest (2008), Rönnedal (2009), (2009b), (2012), Smullyan (1963), (1965), (1966), (1968).

3. Exempel på några teorem

I det här avsnittet kommer vi att bevisa en mängd intressanta satser. Alla teorem handlar om hur de monadiska normativa uttrycken ”Det bör vara fallet att” (eller ”Det är obligatoriskt att”), ”Det är tillåtet att”, ”Det är förbjudet att” (eller ”Det är fel att”) etc., förhåller sig till de komparativa värdeuttrycken ”är bättre än”, ”är minst lika bra som”, ”är lika bra som” osv.

Nr	Teorem	Intuitiv tolkning
(i)	$OA \leftrightarrow (A > \neg A)$	Det bör vara fallet att A omm A är bättre än inte-A.
(ii)	$PA \leftrightarrow (A \geq \neg A)$	Det är tillåtet att A omm A är minst lika bra som inte-A.
(iii)	$FA \leftrightarrow (\neg A > A)$	Det är förbjudet att A omm inte-A är bättre än A.
(iv)	$UA \leftrightarrow (\neg A \geq A)$	Det är oobligatoriskt att A omm inte-A är minst lika bra som A.
(v)	$KA \leftrightarrow (A = \neg A)$	Det är frivilligt att A omm A är lika bra som inte-A.
(vi)	$NA \leftrightarrow \neg(A = \neg A)$	Det är icke-frivilligt att A omm det inte är fallet att A är lika bra som inte-A.

Tabell 1

Teorem 1. Alla satser i tabell 1 är teorem i TG. Vi bevisar del (i) och (ii) och lämnar resten till läsaren.

Bevis. (i) $OA \leftrightarrow (A > \neg A)$

Vänster till höger

$OA \rightarrow (A > \neg A) = O[T]A \rightarrow (P[A \vee \neg A]T \wedge O[A \vee \neg A]\neg\neg A)$

$$\neg(O[T]A \rightarrow (P[A \vee \neg A]T \wedge O[A \vee \neg A]\neg\neg A), 0$$
$$O[T]A, 0$$
$$\neg(P[A \vee \neg A]T \wedge O[A \vee \neg A]\neg\neg A), 0$$
$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$\begin{array}{ll}
\neg P[A \vee \neg A]T, 0 & \neg O[A \vee \neg A]\neg\neg A, 0 \\
O[A \vee \neg A]\neg T, 0 & P[A \vee \neg A]\neg\neg\neg A, 0 \\
A \vee \neg A, 0 & \Box(T \leftrightarrow (A \vee \neg A)), 0 \\
0r_{A \vee \neg A}1 & O[A \vee \neg A]A, 0 \\
\neg T, 1 & 0r_{A \vee \neg A}1 \\
* & \neg\neg\neg A, 1 \\
 & \neg A, 1 \\
 & A, 1 \\
 & *
\end{array}$$

I beviset ovan har vi använt ett par hjälpsatser: $A \vee \neg A$ och $\Box(T \leftrightarrow (A \vee \neg A))$. Dessa kan enkelt bevisas i TG. Således kan vi addera dem till vilken öppen tablå som helst, tack vara the Global Assumption Rule (GA) (se Rönnedal

(2009b)). Liknande hjälpsatser används i flera andra bevis nedan. Från och med nu kommer jag att använda GA då det behövs i de olika härledningarna utan att explicit nämna denna regel. Steget $0r_{A\vee\neg A}1$ bevisas med hjälp av regel Tα3 och $O[A\vee\neg A]A$ med hjälp av DR1 (se Rönnedal (2009b)).

Höger till vänster

$(A>\neg A)\rightarrow OA =$

$(P[A\vee\neg A]T\wedge O[A\vee\neg A]\neg\neg A)\rightarrow O[T]A$

$$\neg((P[A\vee\neg A]T\wedge O[A\vee\neg A]\neg\neg A)\rightarrow O[T]A), 0$$
$$P[A\vee\neg A]T\wedge O[A\vee\neg A]\neg\neg A, 0$$
$$\neg O[T]A, 0$$
$$P[A\vee\neg A]T, 0$$
$$O[A\vee\neg A]\neg\neg A, 0$$
$$P[T]\neg A, 0$$
$$\Box(T\leftrightarrow(A\vee\neg A)), 0$$
$$P[A\vee\neg A]\neg A, 0$$
$$0r_{A\vee\neg A}1$$
$$\neg A, 1$$
$$\neg\neg A, 1$$
$$*$$

(ii) $PA\leftrightarrow(A\geq\neg A)$

Vänster till höger

$PA\rightarrow(A\geq\neg A) =$

$P[T]A\rightarrow(P[A\vee\neg A]T\rightarrow P[A\vee\neg A]A)$

$$\neg(P[T]A\rightarrow(P[A\vee\neg A]T\rightarrow P[A\vee\neg A]A)), 0$$
$$P[T]A, 0$$
$$\neg(P[A\vee\neg A]T\rightarrow P[A\vee\neg A]A), 0$$
$$P[A\vee\neg A]T, 0$$
$$\neg P[A\vee\neg A]A, 0$$
$$O[A\vee\neg A]\neg A, 0$$
$$\Box(T\leftrightarrow(A\vee\neg A)), 0$$
$$P[A\vee\neg A]A, 0$$
$$0r_{A\vee\neg A}1$$
$$A, 1$$
$$\neg A, 1$$
$$*$$

Höger till vänster

$(A \geq \neg A) \rightarrow PA =$

$(P[A \vee \neg A]T \rightarrow P[A \vee \neg A]A) \rightarrow P[T]A$

$$\neg((P[A \vee \neg A]T \rightarrow P[A \vee \neg A]A) \rightarrow P[T]A), 0$$
$$P[A \vee \neg A]T \rightarrow P[A \vee \neg A]A, 0$$
$$\neg P[T]A, 0$$
$$O[T]\neg A, 0$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$

$\neg P[A \vee \neg A]T, 0$	$P[A \vee \neg A]A, 0$
$O[A \vee \neg A]\neg T, 0$	$\Box(T \leftrightarrow (A \vee \neg A)), 0$
$A \vee \neg A, 0$	$O[A \vee \neg A]\neg A, 0$
$0r_{A \vee \neg A}1$	$0r_{A \vee \neg A}1$
$\neg T, 0$	$A, 1$
*	$\neg A, 1$
	* ■

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$OA \rightarrow (A \geq B)$	Om det bör vara fallet att A, så är A minst lika bra som B.
(ii)	$OA \rightarrow \neg(B > A)$	Om det är obligatoriskt att A, så är inte B bättre än A.
(iii)	$(B > A) \rightarrow \neg OA$	Om B är bättre än A, så är det inte obligatoriskt att A.
(iv)	$FA \rightarrow (\neg A \geq B)$	Om det är förbjudet att A, så är inte-A minst lika bra som B.
(v)	$FA \rightarrow \neg(B > \neg A)$	Om det är förbjudet att A, så är B inte bättre än inte-A.
(vi)	$(B > \neg A) \rightarrow PA$	Om B är bättre än inte-A, så är A tillåten.
(vii)	$(B > \neg A) \rightarrow OA$	Om B är bättre än inte-A, så är det obligatoriskt att A.
(viii)	$PA \rightarrow \neg(B > A)$	Om det är tillåtet att A, så är inte B bättre än A.
(ix)	$(B > A) \rightarrow \neg PA$	Om B är bättre än A, så är det inte tillåtet A.
(x)	$PA \rightarrow (A \geq B)$	Om det är tillåtet att A, så är A minst lika bra som B.
(xi)	$\neg(A \geq B) \rightarrow \neg PA$	Om det inte är fallet att A är minst lika bra som B, så är det inte tillåtet att A.
(xii)	$\neg(A \geq B) \rightarrow \neg OA$	Om det inte är fallet att A är minst lika bra som B, så är det inte obligatoriskt att A.
(xiii)	$(B > A) \rightarrow FA$	Om B är bättre än A, så är det förbjudet att A.
(xiv)	$\neg(A \geq B) \rightarrow FA$	Om det inte är fallet att A är minst lika bra som B, så är A förbjuden.

Tabell 2

Teorem 2. Alla satser i tabell 2 är teorem i TG.

Bevis. Vi bevisar del (i), (ii), (vii), (viii), (x) och (xiii) och lämnar resten till läsaren.

(i) $OA \rightarrow (A \geq B) =$
$O[T]A \rightarrow (P[A \lor B]T \rightarrow P[A \lor B]A)$

$$\neg(O[T]A \rightarrow (P[A \lor B]T \rightarrow P[A \lor B]A)), 0$$
$$O[T]A, 0$$
$$\neg(P[A \lor B]T \rightarrow P[A \lor B]A), 0$$
$$P[A \lor B]T, 0$$
$$\neg P[A \lor B]A, 0$$
$$O[A \lor B]\neg A, 0$$
$$T, 0$$
$$0r_T 1$$
$$A, 1$$

↙ ↘

$A \lor B, 1$	$\neg(A \lor B), 1$
$0r_{T \land (A \lor B)}1$	$\neg A, 1$
$\Box((A \lor B) \leftrightarrow (T \land (A \lor B)), 0$	$\neg B, 1$
$O[T \land (A \lor B)]\neg A, 0$	*
$\neg A, 1$	
*	

(ii) $OA \rightarrow \neg(B > A) =$
$O[T]A \rightarrow \neg(P[B \lor A]T \land O[B \lor A]\neg A)$

$$\neg(O[T]A \rightarrow \neg(P[B \lor A]T \land O[B \lor A]\neg A)), 0$$
$$O[T]A, 0$$
$$\neg\neg(P[B \lor A]T \land O[B \lor A]\neg A), 0$$
$$P[B \lor A]T \land O[B \lor A]\neg A, 0$$
$$P[B \lor A]T, 0$$
$$O[B \lor A]\neg A, 0$$
$$T, 0$$
$$0r_T 1$$
$$A, 1$$

↙ ↘

$B \lor A, 1$	$\neg(B \lor A), 1$
$0r_{T \land (B \lor A)}1$	$\neg B, 1$
$\Box((B \lor A) \leftrightarrow (T \land (B \lor A))), 0$	$\neg A, 1$
$O[T \land (B \lor A)]\neg A, 0$	*
$\neg A, 1$	
*	

I både (i) och (ii) ovan delas tablån upp med hjälp av (CUT) (se Rönnedal (2009b)). I beviset av (i) [(ii)] fås steget $0r_{T\wedge(A\vee B)}1$ [$0r_{T\wedge(B\vee A)}1$] med hjälp av Tα2. I beviset av (i) [(ii)] härleds $O[T\wedge(A\vee B)]\neg A$ [$O[T\wedge(B\vee A)]\neg A$] med hjälp av DR1. Och i båda bevisen får vi nod (8) från noden direkt ovanför med hjälp av Tα3.

(vii) $(B>\neg A)\rightarrow OA = (P[B\vee\neg A]T\wedge O[B\vee\neg A]\neg\neg A)\rightarrow O[T]A$

$\neg((P[B\vee\neg A]T\wedge O[B\vee\neg A]\neg\neg A)\rightarrow O[T]A)$, 0

$P[B\vee\neg A]T\wedge O[B\vee\neg A]\neg\neg A$, 0

$\neg O[T]A$, 0

$P[B\vee\neg A]T$, 0

$O[B\vee\neg A]\neg\neg A$, 0

$P[T]\neg A$, 0

$0r_T1$

$\neg A$, 1

↙	↘
$B\vee\neg A$, 1	$\neg(B\vee\neg A)$, 1
$0r_{T\wedge(B\vee\neg A)}1$	$\neg B$, 1
$\Box((B\vee\neg A)\leftrightarrow(T\wedge(B\vee\neg A)))$, 0	$\neg\neg A$, 1
$O[T\wedge(B\vee\neg A)]\neg\neg A$, 0	*
$\neg\neg A$, 1	
*	

(viii) $PA\rightarrow\neg(B>A) = P[T]A\rightarrow\neg(P[B\vee A]T\wedge O[B\vee A]\neg A)$

$P[T]A\rightarrow\neg(P[B\vee A]T\wedge O[B\vee A]\neg A)$, 0

$P[T]A$, 0

$\neg\neg(P[B\vee A]T\wedge O[B\vee A]\neg A)$, 0

$P[B\vee A]T\wedge O[B\vee A]\neg A$,0

$P[B\vee A]T$, 0

$O[B\vee A]\neg A$, 0

$0r_T1$

A, 1

↙	↘
$B\vee A$, 1	$\neg(B\vee A)$, 1
$0r_{T\wedge(B\vee A)}1$	$\neg B$, 1
$\Box((B\vee A)\leftrightarrow(T\wedge(B\vee A)))$, 0	$\neg A$, 1
$O[T\wedge(B\vee A)]\neg A$, 0	*
$\neg A$, 1	
*	

(x) $PA \to (A \geq B) =$
$P[T]A \to (P[A \vee B]T \to P[A \vee B]A)$

$$\neg(P[T]A \to (P[A \vee B]T \to P[A \vee B]A)), 0$$
$$P[T]A, 0$$
$$\neg(P[A \vee B]T \to P[A \vee B]A), 0$$
$$P[A \vee B]T, 0$$
$$\neg P[A \vee B]A, 0$$
$$O[A \vee B]\neg A, 0$$
$$0r_T1$$
$$A, 1$$

↙	↘
$A \vee B, 1$	$\neg(A \vee B), 1$
$0r_{T \wedge (A \vee B)}1$	$\neg A, 1$
$\Box((A \vee B) \leftrightarrow (T \wedge (A \vee B)), 0$	$\neg B, 1$
$O[T \wedge (A \vee B)]\neg A, 0$	*
$\neg A, 1$	
*	

(xiii) $(B > A) \to FA =$
$(P[B \vee A]T \wedge O[B \vee A]\neg A) \to F[T]A$

$$\neg((P[B \vee A]T \wedge O[B \vee A]\neg A) \to F[T]A), 0$$
$$P[B \vee A]T \wedge O[B \vee A]\neg A, 0$$
$$\neg F[T]A, 0$$
$$P[B \vee A]T, 0$$
$$O[B \vee A]\neg A, 0$$
$$P[T]A, 0$$
$$0r_T1$$
$$A, 1$$

↙	↘
$B \vee A, 1$	$\neg(B \vee A), 1$
$0r_{T \wedge (B \vee A)}1$	$\neg B, 1$
$\Box((B \vee A) \leftrightarrow (T \wedge (B \vee A))), 0$	$\neg A, 1$
$O[T \wedge (B \vee A)]\neg A, 0$	*
$\neg A, 1$	
* ■	

Satserna i tabell 2 är intuitivt rimliga. Betrakta t.ex. (i), (ii) och (xiii). (i) $OA \to (A \geq B)$ kan också läsas ”Om det bör vara fallet att A, så är A minst lika bra som allting (annat)”, (ii) $OA \to \neg(B > A)$ ”Om det är obligatoriskt att A, så är ingenting (annat) bättre än A”, och (xiii) $(B > A) \to FA$ ”Om någonting (annat) är bättre än A, så är det förbjudet att A”.

Antag att ”A” och ”B” står för handlingar (eller sakförhållanden som består i att någon utför en handling). Då innebär (i) att handlingen A bör vara fallet endast om denna handling är minst lika bra som varje (annan) handling B. (ii) säger att handlingen A bör vara fallet endast om det inte finns någon (annan) handling B som är bättre än A. Och (xiii) säger att om det finns någon handling B som är bättre än handlingen A, så är A förbjuden. Dessa teorem borde tilltala klassiska konsekvensetiker som anser att endast optimala handlingar är obligatoriska och att alla suboptimala handlingar är förbjudna, även om konsekvensetiken givetvis kan preciseras på en mängd olika sätt. Övriga teorem kan tolkas på liknande vis. (Se dock avsnitt 4.)

Nr	**Teorem**	**Informell tolkning**
(i)	$(OA \wedge FB) \to (A > B)$	Om det är obligatoriskt att A och förbjudet att B, så är A bättre än B.
(ii)	$(PA \wedge FB) \to (A > B)$	Om det är tillåtet att A och förbjudet att B, så är A bättre än B.
(iii)	$(KA \wedge FB) \to (A > B)$	Om det är frivilligt att A och förbjudet att B, så är A bättre än B.
(iv)	$(OA \wedge FB) \to (B < A)$	Om det är obligatoriskt att A och förbjudet att B, så är B sämre än A.
(v)	$(KA \wedge FB) \to (B < A)$	Om det är frivilligt att A och förbjudet att B, så är B sämre än A.
(vi)	$(PA \wedge FB) \to (B < A)$	Om det är tillåtet att A och förbjudet att B, så är B sämre än A.
(vii)	$(OA \wedge FB) \to \neg(A = B)$	Om det är obligatoriskt att A och förbjudet att B, så är A inte lika bra som B.
(viii)	$(KA \wedge FB) \to \neg(A = B)$	Om det är frivilligt att A och förbjudet att B, så är A inte lika bra som B.
(ix)	$(PA \wedge FB) \to \neg(A = B)$	Om det är tillåtet att A och förbjudet att B, så är A inte lika bra som B.

Tabell 3

Teorem 3. Alla satser i tabell 3 är teorem i TG.

Bevis. Vi bevisar del (i), (ii) och (iii) och lämnar resten till läsaren.

(i) $(OA \wedge FB) \rightarrow (A > B) = (O[T]A \wedge F[T]B) \rightarrow (P[A \vee B]T \wedge O[A \vee B]\neg B)$

$$\neg((O[T]A \wedge F[T]B) \rightarrow (P[A \vee B]T \wedge O[A \vee B]\neg B)), 0$$
$$O[T]A \wedge F[T]B, 0$$
$$\neg(P[A \vee B]T \wedge O[A \vee B]\neg B), 0$$
$$O[T]A, 0$$
$$F[T]B, 0$$
$$O[T]\neg B, 0$$
$$T, 0$$

↙	↘
$\neg P[A \vee B]T, 0$	$\neg O[A \vee B]\neg B, 0$
$O[A \vee B]\neg T, 0$	$P[A \vee B]\neg\neg B, 0$
$0r_T1$	$0r_T1$
$A, 1$	$A, 1$
$A \vee B, 1$	$A \vee B, 1$
$0r_{A \vee B}2$	$\Box((A \vee B) \leftrightarrow (T \wedge (A \vee B))), 0$
$\neg T, 2$	$P[T \wedge (A \vee B)]\neg\neg B, 0$
*	$0r_{T \wedge (A \vee B)}2$
	$\neg\neg B, 2$
	$0r_T2$
	$A \vee B, 2$
	$\neg B, 2$
	*

Noden $A \vee B$, 1 fås från noden A, 1 med hjälp av en härledd regel. Enligt denna härledda regel kan vi alltid lägga till $A \vee B$, i på en öppen gren i en tablå om vi har A, i på denna gren. Regeln kan enkelt bevisas med hjälp av (CUT). $0r_T2$ och $A \vee B$, 2 på den högra grenen härleds med hjälp av $T\alpha4$.

(ii) $(PA \wedge FB) \rightarrow (A > B) = (P[T]A \wedge F[T]B) \rightarrow (P[A \vee B]T \wedge O[A \vee B]\neg B)$

$$\neg((P[T]A \wedge F[T]B) \rightarrow (P[A \vee B]T \wedge O[A \vee B]\neg B)), 0$$
$$P[T]A \wedge F[T]B, 0$$
$$\neg(P[A \vee B]T \wedge O[A \vee B]\neg B), 0$$
$$P[T]A, 0$$
$$F[T]B, 0$$
$$O[T]\neg B, 0$$

↙	↘
$\neg P[A \vee B]T, 0$	$\neg O[A \vee B]\neg B, 0$

$O[A\vee B]\neg T, 0$	$P[A\vee B]\neg\neg B, 0$
$0r_T1$	$0r_T1$
$A, 1$	$A, 1$
$A\vee B, 1$	$A\vee B, 1$
$0r_{A\vee B}2$	$\Box((A\vee B)\leftrightarrow(T\wedge(A\vee B))), 0$
$\neg T, 2$	$P[T\wedge(A\vee B)]\neg\neg B, 0$
*	$0r_{T\wedge(A\vee B)}2$
	$\neg\neg B, 2$
	$0r_T2$
	$A\vee B, 2$
	$\neg B, 2$
	*

(iii) $(KA\wedge FB)\rightarrow(A>B)$ =
$((P[T]A\wedge P[T]\neg A)\wedge F[T]B)\rightarrow(P[A\vee B]T\wedge O[A\vee B]\neg B)$

$$\neg(((P[T]A\wedge P[T]\neg A)\wedge F[T]B)\rightarrow(P[A\vee B]T\wedge O[A\vee B]\neg B)), 0$$
$$(P[T]A\wedge P[T]\neg A)\wedge F[T]B, 0$$
$$\neg(P[A\vee B]T\wedge O[A\vee B]\neg B), 0$$
$$P[T]A\wedge P[T]\neg A, 0$$
$$F[T]B, 0$$
$$P[T]A, 0$$
$$P[T]\neg A, 0$$
$$O[T]\neg B, 0$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$

$\neg P[A\vee B]T, 0$	$\neg O[A\vee B]\neg B, 0$
$O[A\vee B]\neg T, 0$	$P[A\vee B]\neg\neg B, 0$
$0r_T1$	$0r_T1$
$A, 1$	$A, 1$
$A\vee B, 1$	$A\vee B, 1$
$0r_{A\vee B}2$	$\Box((A\vee B)\leftrightarrow(T\wedge(A\vee B))), 0$
$\neg T, 2$	$P[T\wedge(A\vee B)]\neg\neg B, 0$
*	$0r_{T\wedge(A\vee B)}2$
	$\neg\neg B, 2$
	$0r_T2$
	$A\vee B, 2$
	$\neg B, 2$
	* ■

Nr	Teorem	Nr	Teorem
(i)	$((OA\vee KA\vee PA)\wedge FB)\rightarrow(A>B)$	(iv)	$((OA\vee KA\vee PA)\wedge FB)\rightarrow\neg(B\geq A)$
(ii)	$((OA\vee KA\vee PA)\wedge FB)\rightarrow\neg(A=B)$	(v)	$((OA\vee KA\vee PA)\wedge FB)\rightarrow\neg(B=A)$
(iii)	$((OA\vee KA\vee PA)\wedge FB)\rightarrow(B<A)$	(vi)	$((OA\vee KA\vee PA)\wedge FB)\rightarrow\neg(A\leq B)$

Tabell 4

Teorem 4. Alla satser i tabell 4 är teorem i TG.

Bevis. Dessa satser kan enkelt bevisas med hjälp av teoremen i tabell 3.

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(OA\wedge(A=B))\rightarrow PB$	Om det är obligatoriskt att A och A är lika bra som B, så är det tillåtet att B.
(ii)	$(PA\wedge(A=B))\rightarrow PB$	Om det är tillåtet att A och A är lika bra som B, så är det tillåtet att B.
(iii)	$(KA\wedge(A=B))\rightarrow PB$	Om det är frivilligt att A och A är lika bra som B, så är det tillåtet att B.

Tabell 5

Teorem 5. Alla satser i tabell 5 är teorem i TG.

Bevis. Vi bevisar del (ii) och lämnar (i) och (iii) till läsaren.

(ii) = $(P[T]A\wedge(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)))\rightarrow P[T]B$

$$\begin{array}{c}
\neg((P[T]A\wedge(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)))\rightarrow P[T]B),\ 0\\
P[T]A,\ 0\\
O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B),\ 0\\
\neg P[T]B,\ 0\\
O[T]\neg B,\ 0\\
0r_T1\\
A,\ 1\\
\neg B,\ 1\\
\swarrow\qquad\qquad\qquad\searrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & A\vee B,\ 1 & \neg(A\vee B),\ 1\\
\swarrow & \searrow & \neg A,\ 1\\
O[A\vee B]\bot,\ 0 & P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B,\ 0 & \neg B,\ 1\\
0r_{A\vee B}2 & P[A\vee B]A,\ 0 & *\\
\bot,\ 2 & P[A\vee B]B,\ 0 & \\
* & \Box((T\wedge(A\vee B))\leftrightarrow(A\vee B)),\ 0 & \\
 & P[T\wedge(A\vee B)]B,\ 0 & \\
 & 0r_{T\wedge(A\vee B)}2 & \\
 & B,\ 2 & \\
 & 0r_T2 & \\
 & A\vee B,\ 2 & \\
 & \neg B,\ 2 & \\
 & *\ \blacksquare &
\end{array}$$

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(FA\wedge(A=B))\rightarrow FB$	Om det är förbjudet att A och A och B är lika bra, så är B förbjuden.
(ii)	$(OA\wedge(\neg A=\neg B))\rightarrow OB$	Om det är obligatoriskt att A och inte-A är lika bra som inte-B, så är det obligatoriskt att B.
(iii)	$(UA\wedge(\neg B=\neg A))\rightarrow UB$	Om det är oobligatoriskt att A och inte-B är lika bra som inte-A, så är det oobligatoriskt att B.
(iv)	$(FA\wedge(\neg B=\neg A))\rightarrow UB$	Om det är förbjudet att A och inte-B är lika bra som inte-A, så är det oobligatoriskt att B.

Tabell 6

Teorem 6. Alla satser i tabell 6 är teorem i TG.

Bevis. Vi bevisar del (i) och (ii) och lämnar resten till läsaren.

(i) $(F[T]A\wedge(O[A\vee B]\perp\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)))\rightarrow F[T]B$

$\neg((F[T]A\wedge(O[A\vee B]\perp\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)))\rightarrow F[T]B)$, 0

$F[T]A$, 0

$O[A\vee B]\perp\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)$, 0

$\neg F[T]B$, 0

$O[T]\neg A$, 0

$P[T]B$, 0

$0r_T1$

B, 1

$\neg A$, 1

↙ ↘

	$A\vee B$, 1	$\neg(A\vee B)$, 1
↙	↘	$\neg A$, 1
$O[A\vee B]\perp$	$P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B$, 0	$\neg B$, 1
$0r_{A\vee B}2$	$P[A\vee B]A$, 0	*
$\perp$, 2	$P[A\vee B]B$, 0	
*	$\Box((T\wedge(A\vee B))\leftrightarrow(A\vee B))$, 0	
	$P[T\wedge(A\vee B)]A$, 0	
	$0r_{T\wedge(A\vee B)}2$	
	A, 2	
	$0r_T2$	
	$A\vee B$, 2	
	$\neg A$, 2	
	*	

(OA∧(¬A=¬B))→OB =

(O[T]A∧(O[¬A∨¬B]⊥∨(P[¬A∨¬B]¬A∧P[¬A∨¬B]¬B)))→O[T]B

¬((O[T]A∧(O[¬A∨¬B]⊥∨(P[¬A∨¬B]¬A∧P[¬A∨¬B]¬B)))→O[T]B), 0

O[T]A∧(O[¬A∨¬B]⊥∨(P[¬A∨¬B]¬A∧P[¬A∨¬B]¬B)), 0

¬O[T]B, 0

O[T]A, 0

O[¬A∨¬B]⊥∨(P[¬A∨¬B]¬A∧P[¬A∨¬B]¬B), 0

P[T]¬B, 0

$0r_T1$

¬B, 1

A, 1

↙ ↘

¬A∨¬B, 1		¬(¬A∨¬B), 1
↙	↘	¬¬A, 1
O[¬A∨¬B]⊥, 0	P[¬A∨¬B]¬A∧P[¬A∨¬B]¬B, 0	¬¬B, 1
$0r_{\neg A\vee\neg B}2$	P[¬A∨¬B]¬A, 0	*
⊥, 2	P[¬A∨¬B]¬B, 0	
*	□((T∧(¬A∨¬B))↔(¬A∨¬B)), 0	
	P[T∧(¬A∨¬B)]¬A, 0	
	$0r_{T\wedge(\neg A\vee\neg B)}2$	
	¬A, 2	
	$0r_T2$	
	¬A∨¬B, 2	
	A, 2	
	* ■	

Nr	**Teorem**	**Informell tolkning**
(i)	(OA∧¬(B=A))→¬OB	Om det är obligatoriskt att A och B inte är lika bra som A, så är det inte obligatoriskt att B.
(ii)	(PA∧¬(B=A))→¬PB	Om det är tillåtet att A och B inte är lika bra som A, så är B inte tillåten.
(iii)	(KA∧¬(B=A))→¬KB	Om det är frivilligt att A och B inte är lika bra som A, så är det inte frivilligt att B.
(iv)	(OA∧¬(B=A))→¬KB	Om det är obligatoriskt att A och B inte är lika bra som A, så är B inte frivillig.
(v)	(OA∧¬(B=A))→¬PB	Om det är obligatoriskt att A och B inte är lika bra som A, så är det inte tillåtet att B.

(vi)	$(PA\wedge\neg(B=A))\rightarrow\neg KB$	Om det är tillåtet att A och B inte är lika bra som A, så är det inte frivilligt att B.
(vii)	$(KA\wedge\neg(B=A))\rightarrow\neg OB$	Om det är frivilligt att A och B inte är lika bra som A, så är B inte obligatorisk.
(viii)	$(PA\wedge\neg(B=A))\rightarrow\neg OB$	Om det är tillåtet att A och B inte är lika bra som A, så är B inte obligatorisk.
(ix)	$(KA\wedge\neg(B=A))\rightarrow\neg PB$	Om det är frivilligt att A och B inte är lika bra som A, så är B inte tillåten.

Tabell 7

Teorem 7. Alla satser i tabell 7 är teorem i TG.

Bevis. Vi bevisar del (i) och lämnar resten till läsaren.

$(OA\wedge\neg(A=B))\rightarrow\neg OB =$

$(O[T]A\wedge\neg(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)))\rightarrow\neg O[T]B$

$$\neg((O[T]A\wedge\neg(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)))\rightarrow\neg O[T]B),\ 0$$
$$(O[T]A\wedge\neg(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)),\ 0$$
$$\neg\neg O[T]B$$
$$O[T]A,\ 0$$
$$\neg(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B)),\ 0$$
$$O[T]B,\ 0$$
$$\neg O[A\vee B]\bot,\ 1$$
$$\neg(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B),\ 1$$
$$T,\ 0$$
$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$\neg P[A\vee B]A,\ 0$	$\neg P[A\vee B]B,\ 0$
$O[A\vee B]\neg A,\ 0$	$O[A\vee B]\neg B,\ 0$
$0r_T1$	$0r_T1$
$A,\ 1$	$B,\ 1$
$A\vee B,\ 1$	$A\vee B,\ 1$
$0r_{T\wedge(A\vee B)}1$	$0r_{T\wedge(A\vee B)}1$
$\Box((T\wedge(A\vee B))\leftrightarrow(A\vee B)),\ 0$	$\Box((T\wedge(A\vee B))\leftrightarrow(A\vee B)),\ 0$
$O[T\wedge(A\vee B)]\neg A,\ 0$	$O[T\wedge(A\vee B)]\neg B,\ 0$
$\neg A,\ 1$	$\neg B,\ 1$
*	* ■

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(OA \wedge OB) \rightarrow (A = B)$	Om det är obligatoriskt att A och obligatoriskt att B, så är A lika bra som B.
(ii)	$(PA \wedge PB) \rightarrow (A = B)$	Om det är tillåtet att A och tillåtet att B, så är A lika bra som B.
(iii)	$(KA \wedge KB) \rightarrow (A = B)$	Om det är frivilligt att A och frivilligt att B, så är A lika bra som B.
(iv)	$(OA \wedge KB) \rightarrow (A = B)$	Om det är obligatoriskt att A och frivilligt att B, så är A lika bra som B.
(v)	$(OA \wedge PB) \rightarrow (A = B)$	Om det är obligatoriskt att A och tillåtet att B, så är A lika bra som B.
(vi)	$(PA \wedge KB) \rightarrow (A = B)$	Om det är tillåtet att A och frivilligt att B, så är A lika bra som B.
(vii)	$(KA \wedge OB) \rightarrow (A = B)$	Om det är frivilligt att A och det är obligatoriskt att B, så är A lika bra som B.
(viii)	$(PA \wedge OB) \rightarrow (A = B)$	Om det är tillåtet att A och obligatoriskt att B, så är A lika bra som B.
(ix)	$(KA \wedge PB) \rightarrow (A = B)$	Om det är frivilligt att A och tillåtet att B, så är A lika bra som B.

Tabell 8

Teorem 8. Alla satser i tabell 8 är teorem i TG.

Bevis. I avsnitt 4 bevisar jag del (i) och (ii). Resten lämnas till läsaren.

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(FA \wedge FB) \rightarrow (\neg A = \neg B)$	Om det är förbjudet att A och förbjudet att B, så är inte-A lika bra som inte-B.
(ii)	$(UA \wedge UB) \rightarrow (\neg A = \neg B)$	Om det är oobligatoriskt att A och oobligatoriskt att B, så är inte-A lika bra som inte-B.
(iii)	$(KA \wedge KB) \rightarrow (\neg A = \neg B)$	Om det är frivilligt att A och frivilligt att B, så är inte-A lika bra som inte-B.
(iv)	$(FA \wedge KB) \rightarrow (\neg A = \neg B)$	Om det är förbjudet att A och frivilligt att B, så är inte-A lika bra som inte-B.
(v)	$(FA \wedge UB) \rightarrow (\neg A = \neg B)$	Om det är förbjudet att A och oobligatoriskt att B, så är inte-A lika bra som inte-B.
(vi)	$(UA \wedge KB) \rightarrow (\neg A = \neg B)$	Om det är oobligatoriskt att A och frivilligt att B, så är inte-A lika bra som inte-B.
(vii)	$(KA \wedge FB) \rightarrow (\neg A = \neg B)$	Om det är frivilligt att A och det är förbjudet att B, så är inte-A lika bra som inte-B.

(viii)	$(UA \wedge FB) \rightarrow (\neg A = \neg B)$	Om det är oobligatoriskt att A och förbjudet att B, så är inte-A lika bra som inte-B.
(ix)	$(KA \wedge UB) \rightarrow (\neg A = \neg B)$	Om det är frivilligt att A och oobligatoriskt att B, så är inte-A lika bra som inte-B.

Tabell 9

Nr	Teorem
(i)	$((OA \vee KA \vee PA) \wedge (OB \vee KB \vee PB)) \rightarrow (A = B)$
(ii)	$((OA \vee KA \vee PA) \wedge \neg(A = B)) \rightarrow (\neg OB \wedge \neg KB \wedge \neg PB)$
(iii)	$((OA \vee KA \vee PA) \wedge (B = A)) \rightarrow PB$
(iv)	$(OA \vee KA \vee PA) \rightarrow ((B = A) \rightarrow PB)$
(v)	$((OA \vee KA \vee PA) \wedge \neg(B = A)) \rightarrow FB$
(vi)	$(OA \vee KA \vee PA) \rightarrow (\neg(B = A) \rightarrow FB)$
(vii)	$(OA \vee KA \vee PA) \rightarrow (PB \rightarrow (B = A))$
(viii)	$(OA \vee KA \vee PA) \rightarrow (PB \leftrightarrow (B = A))$

Tabell 10

Nr	Teorem
(i)	$((FA \vee KA \vee UA) \wedge (FB \vee KB \vee UB)) \rightarrow (\neg A = \neg B)$
(ii)	$((FA \vee KA \vee UA) \wedge \neg(\neg A = \neg B)) \rightarrow (\neg FB \wedge \neg KB \wedge \neg UB)$
(iii)	$((FA \vee KA \vee UA) \wedge (\neg B = \neg A)) \rightarrow UB$
(iv)	$(FA \vee KA \vee UA) \rightarrow ((\neg B = \neg A) \rightarrow UB)$
(v)	$((FA \vee KA \vee UA) \wedge \neg(\neg B = \neg A)) \rightarrow OB$
(vi)	$(FA \vee KA \vee UA) \rightarrow (\neg(\neg B = \neg A) \rightarrow OB)$
(vii)	$(FA \vee KA \vee UA) \rightarrow (UB \rightarrow (\neg B = \neg A))$
(viii)	$(FA \vee KA \vee UA) \rightarrow (UB \leftrightarrow (\neg B = \neg A))$

Tabell 11

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(FA \wedge \neg FB) \rightarrow (B > A)$	Om det är förbjudet att A och det inte är förbjudet att B, så är B bättre än A.
(ii)	$(PA \wedge \neg PB) \rightarrow (A > B)$	Om det är tillåtet att A och det inte är tillåtet att B, så är A bättre än B.
(iii)	$(FA \wedge \neg FB) \rightarrow \neg(A = B)$	Om det är förbjudet att A och det inte är förbjudet att B, så är A inte lika bra som B.
(iv)	$(PA \wedge \neg PB) \rightarrow \neg(A = B)$	Om det är tillåtet att A och det inte är tillåtet att B, så är A inte lika bra som B.

Tabell 12

Nr	Teorem	Informell tolkning
(i)	$(A=B)\rightarrow(FA\leftrightarrow FB)$	Om A och B är lika bra, så är A förbjuden om och endast om B är förbjuden.
(ii)	$(A=B)\rightarrow(PA\leftrightarrow PB)$	Om A och B är lika bra, så är det tillåtet att A om och endast om det är tillåtet att B.
(iii)	$(\neg A=\neg B)\rightarrow(OA\leftrightarrow OB)$	Om inte-A och inte-B är lika bra, så är det obligatoriskt att A om och endast om det är obligatoriskt att B.
(iv)	$(\neg A=\neg B)\rightarrow(UA\leftrightarrow UB)$	Om inte-A och inte-B är lika bra, så är A oobligatorisk om och endast B är oobligatorisk.

Tabell 13

Teorem 9. Alla satser i tabellerna 9 till 13 är teorem i TG.

Bevis. Vi bevisar del (i) i tabell 13 och lämnar resten till läsaren.

(i) = $(O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))\rightarrow(F[T]A\leftrightarrow F[T]B)$

$\neg((O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B))\rightarrow(F[T]A\leftrightarrow F[T]B)), 0$

$O[A\vee B]\bot\vee(P[A\vee B]A\wedge P[A\vee B]B), 0$

$\neg(F[T]A\leftrightarrow F[T]B), 0$

↙ ↘

$F[T]A, 0$	$\neg F[T]A, 0$
$\neg F[T]B, 0$	$F[T]B, 0$
$O[T]\neg A, 0$	$P[T]A, 0$
$P[T]B, 0$	$O[T]\neg B, 0$
$0r_T1$	$0r_T1$
$B, 1$	$A, 1$
$A\vee B, 1$	$A\vee B, 1$
$0r_{A\vee B}2$	$0r_{A\vee B}2$

↙ ↘ ↙ ↘

$O[A\vee B]\bot, 0$	$P[A\vee B]A\wedge$	$O[A\vee B]\bot, 0$	$P[A\vee B]A\wedge$
$\bot, 2$	$P[A\vee B]B, 0$	$\bot, 2$	$P[A\vee B]B, 0$
*	$P[A\vee B]A, 0$	*	$P[A\vee B]A, 0$
	$P[A\vee B]B, 0$		$P[A\vee B]B, 0$
	$\Box((T\wedge(A\vee B))$		$\Box((T\wedge(A\vee B))$
	$\leftrightarrow(A\vee B)), 0$		$\leftrightarrow(A\vee B)), 0$
	$P[T\wedge(A\vee B)]A, 0$		$P[T\wedge(A\vee B)]B, 0$
	$0r_{T\wedge(A\vee B)}3$		$0r_{T\wedge(A\vee B)}3$
	$A, 3$		$B, 3$
	$0r_T3$		$0r_T3$
	$A\vee B, 3$		$A\vee B, 3$
	$\neg A, 3$		$\neg B, 3$
	*		* ■

4. Några problem

Många av de teorem vi har härlett ovan är intuitivt tilltalande. Men det finns också en del satser som är problematiska. De definitioner av värdeuttrycken ”bättre än”, ”minst lika bra som”, ”lika bra som” etc. som vi har använt i den här uppsatsen och de teorem vi har härlett med hjälp av dem i systemet TG är inte uppenbart korrekta eller sanna. I det här avsnittet skall jag ta upp några argument som går ut på att vi antingen bör förkasta dessa definitioner eller överge systemet TG. Även om vi bör ta dessa argument på allvar, kommer jag att argumentera för att de inte är konklusiva.

Det kan finnas två typer av problem med ett logiskt system, såsom TG: det kan vara för starkt och det kan vara för svagt. Ett system är för starkt om vi kan bevisa för mycket i det; det är för svagt om vi kan bevisa för litet. Detta kan förstås på åtminstone två sätt, beroende på om vi talar om formell eller informell styrka och svaghet. Ett system är formellt för starkt om det går att bevisa satser som inte är logiskt sanna enligt systemets formella semantik, och det är för svagt om det inte går att bevisa alla satser som är logiskt sanna enligt den formella semantiken. Ett system är informellt för starkt om det går att bevisa satser som har instanser som är intuitivt orimliga, och det är för svagt om det inte går att bevisa alla satser som är intuitivt giltiga. Systemet TG är inte formellt för starkt. Det visar de tekniska resultaten i Rönnedal (2009b). Huruvida det är formellt för svagt eller inte är en öppen fråga.

I det här avsnittet skall jag undersöka några argument som talar för att TG både är informellt för starkt och för svagt. Jag skall ta upp tre argument som hävdar att det går att bevisa satser i TG som har instanser som är intuitivt orimliga (varianter av argument 2 och 3 diskuteras mer ingående i Rönnedal (201X)), och jag kommer att gå igenom två argument som försöker visa att vi inte kan bevisa alla satser som är intuitivt giltigt i TG. Om de här argumenten är giltiga och våra intuitioner är tillförlitliga, måste vi antingen förkasta de definitioner av värdeuttrycken ”bättre än”, ”minst lika bra som”, ”lika bra som” etc. som vi använder i den här uppsatsen och/eller ge upp systemet TG.

Att ett system inte är tillräckligt starkt är inte ett konklusivt argument emot det. I satslogiken kan vi t.ex. inte bevisa alla satser som är teorem i predikatlogiken och som är intuitivt giltiga. Detta innebär inte att satslogiken bör förkastas. Genom att lägga till regler eller axiom till satslogiken kan man bevisa även alla predikatlogiska sanningar. På samma sätt kan det förhålla sig med systemet TG. Antag att argumenten nedan är hållbara och att vi inte kan bevisa alla satser som är intuitivt giltiga. Även om det skulle vara fallet, så medför inte det att vi bör förkasta TG. Kanske kan vi då lägga till vissa regler eller axiom som gör att det inte längre är informellt för svagt. En sådan lösning på problemen har någonting ad hoc över sig och tycks inte vara helt tillfredsställande. Så om det går att visa att argumenten inte är hållbara tycks det vara att föredra.

Vi skall börja med att undersöka argumenten som talar för att TG, tillsammans med våra definitioner av värdeuttrycken ”bättre än” osv., är för starkt.

Argument 1

Vi nämnde ovan att $(OA \wedge OB) \rightarrow (A = B)$ är ett teorem i TG. Här är ett bevis.

$(OA \wedge OB) \rightarrow (A = B) =$

$(O[T]A \wedge O[T]B) \rightarrow (O[A \vee B]\bot \vee (P[A \vee B]A \wedge P[A \vee B]B))$

$$\neg((O[T]A \wedge O[T]B) \rightarrow (O[A \vee B]\bot \vee (P[A \vee B]A \wedge P[A \vee B]B))), 0$$
$$O[T]A \wedge O[T]B, 0$$
$$\neg(O[A \vee B]\bot \vee (P[A \vee B]A \wedge P[A \vee B]B)), 0$$
$$O[T]A, 0$$
$$O[T]B, 0$$
$$\neg O[A \vee B]\bot, 0$$
$$\neg(P[A \vee B]A \wedge P[A \vee B]B), 0$$
$$T, 0$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$

$\neg P[A \vee B]A, 0$	$\neg P[A \vee B]B, 0$
$O[A \vee B]\neg A, 0$	$O[A \vee B]\neg B, 0$
$0r_T1$	$0r_T1$
$A, 1$	$B, 1$
$A \vee B, 1$	$A \vee B, 1$
$0r_{T \wedge (A \vee B)}1$	$0r_{T \wedge (A \vee B)}1$
$\Box((T \wedge (A \vee B)) \leftrightarrow (A \vee B)), 0$	$\Box((T \wedge (A \vee B)) \leftrightarrow (A \vee B)), 0$
$O[T \wedge (A \vee B)]\neg A, 0$	$O[T \wedge (A \vee B)]\neg B, 0$
$\neg A, 1$	$\neg B, 1$
*	*

Men denna sats har problematiska instanser. Antag att $(OA \wedge OB) \rightarrow (A = B)$ är giltig, att du bör tacka artigt för hjälpen och att du bör se till att din son inte svälter ihjäl. Då följer det att det är lika bra att du tackar artigt för hjälpen som att du ser till att din son inte svälter ihjäl. Men detta är kontraintuitivt. Det är inte lika bra att du tackar artigt för hjälpen som att du ser till att din son inte svälter ihjäl. Det är bättre att du ser till att din son inte svälter ihjäl än att du tackar artigt för hjälpen. Och om A är bättre än B, så är A och B inte lika bra. Med andra ord tycks följande mängd satser vara konsistent.

Satsmängd 1
1.1 Du bör tacka artigt för hjälpen.
1.2 Du bör se till att din son inte svälter ihjäl.
1.3 Det är inte fallet att det är lika bra att du tackar artigt för hjälpen som att du ser till att din son inte svälter ihjäl.

Låt p = ”Du tackar artigt för hjälpen”, q = ”Du ser till att din son inte svälter ihjäl”. Då kan vi symbolisera satsmängd 1 på följande sätt: (1.1) Op, (1.2) Oq, (1.3) $\neg(p = q)$. Men om det är möjligt att alla dessa satser är sanna, så kan inte $(OA \wedge OB) \rightarrow (A = B)$ vara giltig. Och om $(OA \wedge OB) \rightarrow (A = B)$ inte är giltig, så är det antingen något fel på vår definition av ”lika bra som” eller på systemet TG.

Kan detta argument bemötas och i så fall hur? Anledningen till att (1.3) tycks vara sann förefaller vara att det tycks vara bättre att du ser till att din son inte svälter ihjäl än att du tackar artigt för hjälpen. Min hypotes är att ”bättre än” kan användas i flera olika betydelser. Och enlig minst två olika tolkningar av detta uttryck tycks det vara sant att det är bättre att du ser till att din son inte svälter ihjäl än att du tackar artigt för hjälpen. Från detta följer det emellertid inte att detsamma gäller för den interpretation av ”bättre än” som vi använder i den här uppsatsen.

Enligt den första tolkningen betyder ”A är bättre än B” att A i sig är bättre än B i sig. Och i denna mening tycks det vara bättre att du ser till att din son inte svälter ihjäl än att du tackar artigt för hjälpen. Att A är bättre i sig än B i sig, medför dock inte att A allt taget i beaktande är (moraliskt) bättre än B. Det kan t.ex. vara bättre i sig att du inte går till tandläkaren än att du går till tandläkaren, eftersom det innebär ett visst obehag att gå till tandläkaren. Men detta innebär inte att det allt taget i beaktande är bättre att du inte går till tandläkaren än att du går till tandläkaren. Allt taget i beaktande är det bättre att du går till tandläkaren än att du inte går till tandläkaren. För om du inte går till tandläkaren kommer du att få svår tandvärk och kanske tvingas dra ut en tand. Men vi talar i den här uppsatsen om allt taget i beaktande moraliska värderelationer. Att det tycks vara bättre i sig att du ser till att din son inte svälter ihjäl än att du tackar artigt för hjälpen, bevisar därför inte att det inte är fallet att det allt taget i beaktande är fallet att det är (moraliskt) lika bra att du tackar artigt för hjälpen som att du ser till att din son inte svälter ihjäl.

Enligt den andra tolkningen betyder ”A är bättre än B” att om du är tvungen att välja mellan A och B, så bör du välja A. Och i denna mening tycks det vara bättre att du ser till att din son inte svälter ihjäl än att du tackar artigt för hjälpen. Om du är tvungen att välja mellan att tacka artigt för hjälpen och att se till att din son inte svälter ihjäl, så bör du se till att din son inte svälter ihjäl. Men notera att om du är tvungen att välja mellan A och B, om det inte är möjligt att både A och B är sanna, så kan inte både A och B vara obligatoriska: $\neg\Diamond(A \wedge B) \rightarrow \neg(OA \wedge OB)$ är ett teorem i TG. Så om det är omöjligt att du tackar artigt för hjälpen och ser till att din son inte svälter ihjäl, och det är obligatoriskt att du ser till att din son inte svälter ihjäl, så är det inte obligatoriskt att du tackar artigt för hjälpen. Antag att du bör tacka artigt för hjälpen och att du bör se till att din son inte svälter ihjäl. Då följer det att det är möjligt att du både tackar artigt för hjälpen och ser till att din son inte svälter ihjäl. Givet dessa antaganden är det inte rimligt att påstå att du måste välja mellan att antingen tacka artigt för hjälpen och att se till att din son inte svälter ihjäl. Med andra ord, även om det är sant att du bör se till att din son inte svälter ihjäl om du måste välja mellan att tacka artigt för hjälpen och se till att din son inte svälter ihjäl, och det i denna mening är bättre att du ser till att din son inte svälter ihjäl än att du tackar artigt för hjälpen, så följer det inte att det allt taget i beaktande är (moraliskt) bättre att du ser till att din son inte svälter ihjäl än att du tackar artigt för hjälpen. Om du bör tacka artigt för hjälpen och du bör se till att din son inte svälter ihjäl, så är det möjligt att göra båda sakerna.

När vi säger att A är bättre än B eller att A och B är lika bra i den här uppsatsen, så talar vi om allt taget i beaktande (moraliska) värderelationer. Och om vi förstår våra värdeuttryck på detta sätt, är det inte alls uppenbart att det är möjligt att alla satser i satsmängd 1 kan vara sanna. Tvärtom, om det allt taget i beaktande (moraliskt) bör vara fallet att A och det allt taget i beaktande (moraliskt) bör vara fallet att B, så tycks det också som om A och B allt taget i beaktande är (moraliskt) lika bra. Argument 1 tycks därför inte vara konklusivt.

Argument 2

Vi har ovan bevisat att $(OA \wedge OB) \rightarrow (A = B)$ är ett teorem i TG. Byt ut A mot $\neg A$ och B mot $\neg B$. Då får vi $(O\neg A \wedge O\neg B) \rightarrow (\neg A = \neg B)$. Eftersom $O\neg A$ är logiskt ekvivalent med FA, följer det att också $(FA \wedge FB) \rightarrow (\neg A = \neg B)$ är ett teorem i TG. Men denna sats har, liksom $(OA \wedge OB) \rightarrow (A = B)$, problematiska instanser. Följande satsmängd förefaller t.ex. vara konsistent (Rönnedal (201X)).

Satsmängd 2
2.1 Det är förbjudet att du stjäl ett äpple.
2.2 Det är förbjudet att du mördar din partner.
2.3 Det är inte fallet att det är lika bra att du inte stjäl ett äpple som att du inte mördar din partner.

Men om denna mängd är konsistent, så kan inte $(FA \wedge FB) \to (\neg A = \neg B)$ vara ett teorem. Om $(FA \wedge FB) \to (\neg A = \neg B)$ är giltig, det är förbjudet att du stjäl ett äpple, och det är förbjudet att du mördar din partner, så följer det att det är lika bra att du inte stjäl ett äpple som att du inte mördar din partner. Men det är bättre att du inte mördar din partner än att du inte stjäl ett äpple. Att mörda sin partner är ett mycket värre brott än att stjäla ett äpple. Låt p = ”Du stjäl ett äpple”, q = ”Du mördar din partner”. Då kan satserna i satsmängd 2 symboliseras på följande sätt: (2.1) Fp, (2.2) Fq (2.3) $\neg(\neg p = \neg q)$. Men om det är möjligt att alla dessa satser är sanna, så kan inte $(FA \wedge FB) \to (\neg A = \neg B)$ vara giltig. Och om $(FA \wedge FB) \to (\neg A = \neg B)$ inte är giltig, så är det antingen något fel på vår definition av ”lika bra som” eller på systemet TG.

Detta argument kan bemötas på samma sätt som argument 1. När vi i den här uppsatsen säger att det är lika bra att du inte stjäl ett äpple som att du inte mördar din partner, så menar vi inte att dessa sakförhållanden i sig är lika bra eller att om du var tvungen att välja mellan dem så skulle det inte spela någon roll vad du valde. Det är bättre i sig att du inte mördar din partner än att du inte stjäl ett äpple, och om du är tvungen att välja mellan att stjäla ett äpple och att mörda din partner, så bör du stjäla ett äpple. Notera också att då vi talar om att något är förbjudet, så menar vi att det är moraliskt förbjudet allt taget i beaktande. Vi menar inte att det är förbjudet enligt lagen. Att det är juridiskt förbjudet att A och juridiskt förbjudet att B medför inte att inte-A och inte-B är moraliskt lika bra. Att säga att det moraliskt allt taget i beaktande är förbjudet att stjäla eller att mörda, innebär – enligt språkbruket i denna uppsats – att det i alla de bästa möjliga världarna är fallet att du inte stjäl och att du inte mördar. Alltså finns det ingen bättre värld än dessa.

Notera att om det är förbjudet att du stjäl ett äpple och det är förbjudet att du mördar din partner, så är det möjligt att inte stjäla och det är möjligt att inte mörda och det är möjligt att inte stjäla och att inte mörda. $((FA \wedge FB) \to \Diamond(\neg A \wedge \neg B))$ är ett teorem i TG. Om du är tvungen att välja mellan att stjäla och att mörda och det är förbjudet att du mördar, så är det inte förbjudet att du stjäl. $(\neg\Diamond(\neg A \land \neg B) \to (\neg FA \lor \neg FB))$ är ett teorem i TG. Detta argument tycks därför inte heller vara konklusivt. (Argumentet diskuteras mer ingående i Rönnedal (201X).)

Argument 3

Låt oss nu undersöka det tredje och sista argumentet för att TG, tillsammans med våra definitioner av värderelationerna bättre än etc., är för starkt. Nedanstående tablå bevisar att $(PA \land PB) \to (A = B)$ är ett teorem i TG (Rönnedal (201X)).

$(PA \land PB) \to (A = B) =$

$(P[T]A \land P[T]B) \to (O[A \lor B]\bot \lor (P[A \lor B]A \land P[A \lor B]B))$

$$\begin{array}{c}
\neg((P[T]A \land P[T]B) \to (O[A \lor B]\bot \lor (P[A \lor B]A \land P[A \lor B]B))), 0 \\
P[T]A \land P[T]B, 0 \\
\neg(O[A \lor B]\bot \lor (P[A \lor B]A \land P[A \lor B]B)), 0 \\
P[T]A, 0 \\
P[T]B, 0 \\
\neg O[A \lor B]\bot, 0 \\
\neg(P[A \lor B]A \land P[A \lor B]B), 0 \\
\swarrow \qquad \searrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\neg P[A \lor B]A, 0 & \neg P[A \lor B]B, 0 \\
O[A \lor B]\neg A, 0 & O[A \lor B]\neg B, 0 \\
0r_T1 & 0r_T1 \\
A, 1 & B, 1 \\
\swarrow \qquad \searrow & \swarrow \qquad \searrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
A \lor B, 1 & \neg(A \lor B), 1 & A \lor B, 1 & \neg(A \lor B), 1 \\
0r_{T \land (A \lor B)}1 & \neg A, 1 & 0r_{T \land (A \lor B)}1 & \neg A, 1 \\
\Box((A \lor B) \leftrightarrow & \neg B, 1 & \Box((A \lor B) \leftrightarrow & \neg B, 1 \\
(T \land (A \lor B))), 0 & * & (T \land (A \lor B))), 0 & * \\
O[T \land (A \lor B)]\neg A, 0 & & O[T \land (A \lor B)]\neg B, 0 & \\
\neg A, 1 & & \neg B, 1 & \\
* & & * &
\end{array}$$

Men $(PA \land PB) \to (A = B)$ tycks, liksom $(OA \land OB) \to (A = B)$ och $(FA \land FB) \to (\neg A = \neg B)$, ha intuitivt problematiska instanser. Om $(PA \land PB) \to (A = B)$ är giltig, det är tillåtet att du behåller alla pengar själv och det är tillåtet att du skänker pengar till välgörande ändamål, så följer det att det är lika bra att du behåller alla pengar själv som att du skänker pengar till välgörande ändamål.

Men det är bättre att du skänker pengar till välgörande ändamål än att du behåller alla pengar själv. Följande mängd satser tycks vara konsistent.

Satsmängd 3
3.1 Det är tillåtet att du behåller alla pengar själv.
3.2 Det är tillåtet att du skänker pengar till välgörande ändamål.
3.3. Det är inte fallet att det är lika bra att du behåller alla pengar själv som att du skänker pengar till välgörande ändamål.

Låt p = ”Du behåller alla pengar själv”, och q = ”Du skänker pengar till välgörande ändamål”. Då kan satserna i satsmängd 3 symboliseras på följande sätt: (3.1) Pp, (3.2) Pq, (3.3) $\neg(p = q)$. Men det är inte möjligt att alla dessa satser är sanna om $(PA \wedge PB) \rightarrow (A = B)$ är giltig. Om $(PA \wedge PB) \rightarrow (A = B)$ inte är giltig, så är det antingen något fel på vår definition av ”lika bra som” eller på systemet TG.

Onekligen är det åtminstone vid en första anblick intuitivt rimligt att påstå att det är bättre att du skänker pengar till välgörande ändamål än att du behåller alla pengar själv samtidigt som det är tillåtet att du behåller alla pengar själv och tillåtet att du skänker pengar till välgörande ändamål. Kan vi använda samma strategier för att besvara detta argument som vi använde för att besvara argument 1 och 2? Låt oss först notera att vi inte talar om vad som är tillåtet enligt lagen. Det kan vara juridiskt tillåtet att du behåller alla pengar själv och juridiskt tillåtet att du skänker pengar till välgörande ändamål, samtidigt som det är bättre att du skänker pengar till välgörande ändamål än att du behåller alla pengar själv. Det vi talar om är vad som är allt taget i beaktande moraliskt tillåtet. $\{OA, OB, \neg\Diamond(A \wedge B)\}$ och $\{FA, FB, \neg\Diamond(\neg A \wedge \neg B)\}$ är båda inkonsistenta, men $\{PA, PB, \neg\Diamond(A \wedge B)\}$ är konsistent. $\neg\Diamond(A \wedge B) \rightarrow \neg P(A \wedge B)$ är ett teorem i TG, men $PA \wedge PB$ medför inte $P(A \wedge B)$. Så, från påståendet att du måste välja mellan att behålla alla pengar själv och att skänka pengar till välgörande ändamål – vilket förefaller vara sant – och propositionen att det är tillåtet att du skänker pengar till välgörande ändamål, följer det inte att det inte är tillåtet att behålla alla pengar själv. Om det däremot är fallet att du bör skänka pengar till välgörande ändamål och det inte är möjligt att behålla alla pengar själv och skänka pengar till välgörande ändamål, så är det inte tillåtet att du behåller alla pengar själv.

Det rimligaste svaret på detta argument tycks vara att om det verkligen är moraliskt bättre att du skänker pengar till välgörande ändamål än att du behåller alla pengar själv (allt taget i beaktande), så är det inte (moraliskt) allt taget i beaktande tillåtet att du behåller alla pengar själv. Detta innebär inte nödvändigtvis att du bör straffas eller klandras om du inte skänker pengar till välgörande ändamål. Det medför inte att det bör vara förbjudet enligt lagen att inte skänka pengar till välgörande ändamål. Men om det verkligen är bättre, så följer det att det är (moraliskt) fel om du inte skänker pengar till välgörande ändamål. Det här är en uppfattning om relationen mellan värde-relationer och normer som passar bra överens med olika former av konse-kvensetik som hävdar att endast optimala handlingar är tillåtna. Det är tillåtet att du behåller alla pengar själv endast om det är lika bra att du behåller alla pengar själv som att du skänker pengar till välgörande ändamål. Endast ”det bästa” är obligatoriskt, och endast vad som är ett av de bästa alternativen är tillåtet. Även vissa former av icke-teleologiska system kan acceptera detta (t.ex. vissa former av stoicism (se Rönnedal (201X)). En konsekvens tycks vara att mängden tillåtna ting blir relativt liten, och att moralen ställer väldigt höga krav på oss. Inte alla typer av moraliska system är dock av detta slag. Och det är nog riktigt att TG, tillsammans med de definitioner av ”bättre än” osv. som vi använder i den här uppsatsen, inte är förenligt med alla sådana system. Så, om något sådant system representerar den ”riktiga” moralen, bör vi antingen förkasta våra definitioner eller systemet TG. Om däremot t.ex. någon form av klassisk konsekvensetik (eller stoicism) av det slag vi nämnt ovan är korrekt, så är argument 3 inte konklusivt. (Argument 3 diskuteras mer ingående i Rönnedal (201X).)

Sammanfattningsvis tycks det vara möjligt att förkasta (1.3) i satsmängd 1 om (1.1) och (1.2) är sanna, (2.3) i satsmängd 2 om (2.1) och (2.2) är sanna, och (3.1) i satsmängd 3 om det faktiskt är bättre att du skänker pengar till välgörande ändamål än att du behåller alla pengar själv.

Argument 4

Låt oss nu undersöka två argument som talar för att TG är för informellt svagt. Att påstå att TG är informellt för svagt innebär, som vi erinrar oss, att vi inte kan bevisa alla satser som förefaller vara intuitivt giltiga. Enligt argument 4, så är följande sats intuitivt giltig:

$$OA \rightarrow (A > B)$$

Men denna sats kan inte bevisas i TG. Vi kan endast bevisa $OA \rightarrow (A \geq B)$ (se tabell 2 ovan). $OA \rightarrow (A \geq B)$ säger att A är obligatorisk endast om A är minst lika bra som B, medan $OA \rightarrow (A > B)$ säger att A är obligatorisk endast om A är bättre än B. Enligt klassisk konsekvensetik, är en handling tillåten endast om den är minst lika bra som varje alternativ handling, medan den är obligatorisk endast om den är *bättre* än varje annan alternativ handling. Detta är en anledning till att $OA \rightarrow (A > B)$ kan tyckas vara giltig.

Det här argumentet kan emellertid besvaras relativt enkelt. I klassisk konsekvensetik antar man att de olika handlingarna är ömsesidigt uteslutande, men i vårt fall står A och B för vilka satser som helst. A och B behöver därför inte utesluta varandra. Om vi antar att A och B är ömsesidigt uteslutande, dvs. om det är nödvändigt att A är sann om och endast om B är falsk (och tvärtom), så kan vi bevisa att OA medför $A > B$. Det är lätt att se att så är fallet, eftersom vi ovan har bevisat $(OA \wedge FB) \rightarrow (A > B)$ och eftersom $(OA \wedge \Box(A \leftrightarrow \neg B)) \rightarrow FB$ är ett teorem i TG. Från detta följer det att $(OA \wedge \Box(A \leftrightarrow \neg B)) \rightarrow (A > B)$. Nedanstående semantiska tablå bevisar samma sak.

$O[T]A \rightarrow (\Box(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow (A > B))$

$$
\begin{array}{c}
\neg(O[T]A \rightarrow (\Box(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow (A > B))), 0 \\
O[T]A, 0 \\
\neg(\Box(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow (A > B)), 0 \\
\Box(A \leftrightarrow \neg B), 0 \\
\neg(A > B), 0 \\
\neg(P[A \vee B]T \wedge O[A \vee B]\neg B), 0 \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\multicolumn{2}{l}{\neg P[A \vee B]T, 0} & \neg O[A \vee B]\neg B, 0 \\
\multicolumn{2}{l}{O[A \vee B]\neg T, 0} & P[A \vee B]\neg\neg B, 0 \\
\multicolumn{2}{l}{A \leftrightarrow \neg B, 0} & \Box((A \vee B) \leftrightarrow (T \wedge (A \vee B))), 0 \\
\swarrow & \searrow & P[T \wedge (A \vee B)]\neg\neg B, 0 \\
A, 0 & \neg A, 0 & 0r_{T \wedge (A \vee B)}1 \\
\neg B, 0 & \neg\neg B, 0 & \neg\neg B, 1 \\
A \vee B, 0 & A \vee B, 0 & A \leftrightarrow \neg B, 1 \\
0r_{A \vee B}1 & 0r_{A \vee B}1 & \neg A, 1 \\
\neg T, 1 & \neg T, 1 & T, 0 \\
* & * & 0r_{T}2 \\
 & & A, 2 \\
 & & A \vee B, 2 \\
 & & 0r_{T}1 \\
 & & A \vee B, 1 \\
 & & A, 1 \\
 & & *
\end{array}
$$

Det kan vara intressant att notera att även det omvända gäller, dvs. $(\Box(A \leftrightarrow \neg B) \wedge (A > B)) \rightarrow OA$ är ett teorem i TG. Från detta följer det att också $\Box(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow (OA \leftrightarrow (A > B))$ är ett teorem i TG.

Argument 5
Vårt sista argument tycks vara något mer besvärande. Detta argument går också ut på att vårt system är för svagt eftersom vi inte kan bevisa nedanstående intuitivt giltiga sats:

$$(OA \wedge (A = B)) \rightarrow OB$$

Följande modell bevisar att denna formel inte är giltig i klassen av alla s.k. H3-modeller (se Rönnedal (2009b)). Det följer att denna sats inte kan bevisas i TG, eftersom TG är sunt i förhållande till denna klass. Låt W vara mängden av alla möjliga världar, w_0, w_1 osv. är världar i W. W = $\{w_0, w_1, w_2\}$. w_1 och w_2 är lika bra och bättre än w_0. A är sann och B falsk i w_1. A är sann och B är sann i w_2. $A \vee B$ är sann i w_1 och w_2. w_1 och w_2 är de bästa världarna i vilka $A \vee B$ är sann. OA är sann eftersom A är sann i alla de bästa världarna (w_1 och w_2). $P[A \vee B]A$ är sann eftersom A är sann i åtminstone en av de bästa $A \vee B$ världarna (t.ex. i w_1). $P[A \vee B]B$ är sann eftersom B är sann i åtminstone en av de bästa $A \vee B$ världarna (w_2). Alltså är $O[A \vee B]\bot \vee (P[A \vee B]A \wedge P[A \vee B]B)$ sann. Däremot är inte OB sann eftersom B är falsk i en av de bästa världarna, nämligen i w_1. Alltså är försatsen sann men eftersatsen falsk. Således är hela satsen falsk i denna modell. Det följer att satsen inte är giltig.

Det är alltså möjligt att det bör vara fallet att A och att A och B är lika bra samtidigt som det inte bör vara fallet att B. Men om A och B verkligen är (moraliskt) lika bra (allt taget i beaktande), hur kan då A vara obligatorisk samtidigt som B inte är obligatorisk? Om A och B är moraliskt lika bra allt taget i beaktande, borde det inte vara fallet att A är obligatorisk om och endast om B är obligatorisk? Om detta är riktigt, så är TG tillsammans med våra definitioner informellt för svagt och inte helt tillfredsställande.

Ett möjligt svar på denna invändning är att försöka utveckla någon extension av TG som gör det möjligt att bevisa $(OA \wedge (A = B)) \rightarrow OB$. Det är emellertid oklart om det går att hitta någon sådan extension som inte är ad hoc. En möjlighet är att kräva att det alltid finns högst en A-tillgänglig värld från varje värld (för varje A) och att införa en tablåregel som svarar mot detta villkor (tekniskt är detta enkelt). Gör vi det, blir $(OA \wedge (A = B)) \rightarrow OB$ giltig. Men ett system av detta slag leder till ett slags moralisk rigorism, där allting är antingen obligatoriskt eller förbjudet. Och det är tveksamt om ett sådant system är rimligt.

Det är inte uppenbart att intuitionen att $(OA \wedge (A = B)) \rightarrow OB$ är giltig är korrekt. Det går att beskriva situationer som pekar i en annan riktning. Det tycks t.ex. som om det skulle kunna vara lika bra att du hjälper person 1 som att du hjälper person 2 och att du bör hjälpa person 1 eftersom du har lovat att göra det, samtidigt som du inte har en plikt att hjälpa person 2 eftersom du inte har lovat person 2 någonting. Oavsett hur det förhåller sig med detta, så är argument 5 inte i sig tillräckligt starkt för att förkasta TG. På sin höjd visar det att TG är informellt för svagt. Men som vi påpekade ovan är det inte ett tillräckligt skäl att förkasta ett logiskt system. Satslogiken är ett exempel på detta.

Min slutsats är att även om argumenten 1–5 bör tas på största allvar, så är de inte konklusiva. Huruvida våra definitioner av värdeuttrycken ”bättre än”, ”lika bra som” osv. är rimliga och TG ”korrekt”, tycks sist och slutligen bero på vilken typ att moralfilosofiskt system som är sant.

Referenser

Beth, E. W. (1955). Semantic Entailment and Formal Derivability. Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afdeling Letterkunde, N.S., vol. 18, nr. 13, Amsterdam, ss. 309–342. Publicerad på nytt i *Hintikka, J.* (1969), ss. 9–41.

Beth, E. W. (1959). *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam.

Chisholm, R. M. (1963). Contrary-to-duty Imperatives and Deontic Logic. *Analysis* 24, ss. 33–36.

D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle R. & Posegga J. (red.). (1999). *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Danielsson, S. (1968). *Preference and Obligation: Studies in the Logic of Ethics*. Filosofiska föreningen, Uppsala.

Fitting, M. (1972). Tableau methods of proof for modal logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 13, ss. 237–247.

Fitting, M. (1983). *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logic*. D. Reidel, Dordrecht.

Fitting, M. (1999). Introduction. I *D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle R. & Posegga J.* (red.). (1999), ss. 1–43.

Gabbay, D. & Guenthner F. (red.). (1984). *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 2, D. Reidel.

Gabbay, D. & Guenthner, F. (red.). (2002). *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. 8, D. Reidel.

Gabbay, D., Horty, J., Parent, X., van der Meyden, E. & van der Torre, L. (red.). (2013). *Handbook of Deontic Logic and Normative Systems*. College Publications.

Hansson, B. (1969). An Analysis of Some Deontic Logics. *Noûs* 3, ss. 373–398. Tryckt på nytt i Hilpinen, R. (red.). (1971), ss. 121–147.

Hilpinen, R. (red.). (1971). *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Hilpinen, R. (red.). (1981). *New Studies in Deontic Logic Norms, Actions, and the Foundation of Ethics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Hintikka, J. (1969). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford Readings in Philosophy, Oxford University Press, Oxford.

Jeffrey, R. C. (1967). *Formal Logic: Its Scope and Limits*. McGraw-Hill, New York.

Kripke, S. A. (1959). A Completeness Theorem in Modal Logic. *The Journal of Symbolic Logic* 24, ss. 1–14.

Lenk, H., & Berkemann J. (red.). (1974). *Normenlogik: Grundprobleme der deontischen Logik*. UTB, 414, Verlag Dokumentation, Pullach (near München).

Lewis, D. (1973). *Counterfactuals*. Basil Blackwell, Oxford.

Lewis, D. (1974). Semantic analysis for dyadic deontic logic. I *Stenlund, S.* (red.). (1974), ss. 1–14.

Mally, E. (1926). *Grundgesetze des Sollens Elemente der Logik des Willens*. Leuschner and Lubensky, Graz.

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge University Press, Cambridge.

Prior, A. (1954). The Paradoxes of Derived Obligation. *Mind* 63, ss. 64–65.

Rescher, N. (1958). An axiom system for deontic logic. *Philosophical studies*, Vol. 9, ss. 24–30.

Rönnedal, D. (2009). Counterfactuals and Semantic Tableaux. *Logic and Logical Philosophy*, Vol. 18, Nr. 1, ss. 71–91.

Rönnedal, D. (2009b). Dyadic Deontic Logic and Semantic Tableaux. *Logic and Logical Philosophy*, Vol. 18, Nr. 3–4, ss. 221–252.

Rönnedal, D. (2010). *An Introduction to Deontic Logic*. Charleston, SC.

Rönnedal, D. (2012). *Extensions of Deontic Logic: An Investigation into some Multi-Modal Systems*, Department of Philosophy, Stockholm University.

Rönnedal, D. (2015). Dyadisk Deontisk Logik: En Härledning av Några Teorem. *Filosofiska Notiser*, Årgång 2, Nr. 2, ss. 19–52.

Rönnedal, D. (201X). Transgressions are equal, and right actions are equal: Some philosophical reflections on paradox III in Cicero's Paradoxa Stoicorum. *Philosophia*. Antagen (DOI: 10.1007/s11406-016-9761-4).

Smullyan, R. M. (1963). A unifying Principle in Quantificational Theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 49, 6, ss. 828–832.

Smullyan, R. M. (1965). Analytic Natural Deduction. *Journal of Symbolic Logic* 30, ss. 123–139.

Smullyan, R. M. (1966). Trees and Nest Structures. *Journal of Symbolic Logic* 31, ss. 303–321.

Smullyan, R. M. (1968). *First-Order Logic*. Heidelberg, Springer-Verlag.

Stenlund, S. (red.). (1974). *Logical Theory and Semantical Analysis*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

van Fraassen, B. C. (1972). The Logic of Conditional Obligation. *Journal of Philosophical Logic* 1, ss. 417–438.

van Fraassen, B. C. (1973). Values and the Heart’s Command. *The Journal of Philosophy* LXX, ss. 5–19.

von Kutschera, F. (1974). Normative Präferenzen und bedingte Gebote. I *Lenk, H., & Berkemann J.* (red.). (1974), ss. 137–165.

von Wright, G. H. (1951). Deontic Logic. *Mind* 60, ss. 1–15.

von Wright, G. H. (1964). A new system of deontic logic. *Danish yearbook of philosophy*, Vol. 1, ss. 173–182.

Åqvist, L. (1971). Revised foundations for imperative-epistemic and interrogative logic. *Theoria*, Vol. 37, Nr. 1, ss. 33–73.

Åqvist, L. (1973). Modal Logic with Subjunctive Conditionals and Dispositional Predicates. *Journal of Philosophical Logic*. Vol. 2, Nr. 1, ss. 1–76.

Åqvist, L. (1984). Deontic Logic. I *Gabbay, D. & Guenthner F.* (red.). (1984), ss. 605–714.

Åqvist, L. (1987). *Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems*. Bibliopolis, Naples.

Åqvist, L. (2002). Deontic Logic. I *Gabbay, D. & Guenthner, F.* (red.). (2002), ss. 147–264.

Daniel Rönnedal
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
daniel.ronnedal@philosophy.su.se

Words of Desire: Poetry and Non-Rational Motivation in Plato's *Republic*

Olof Pettersson

Abstract
Although it is often acknowledged that poetry can only influence the non-rational part of the soul, this is rarely thought to be decisive for Plato's argument. Poetry, instead, is taken to be psychologically corrupting because it is third removed from reality. By a closer look at Plato's account of the address of poetry in the *Republic,* this paper argues that Plato takes poetry to be morally corrupting, not because of bad imitation, but because it represents and strengthens the illusory sentiments of an already corrupted character condition. Looking at the dialogue from this point of view can both help to clarify how the illusions of poetry are morally dangerous, and not just metaphysically wrong, and why Plato puts so much effort into explaining them.

Introduction

Plato's account of poetry in book ten of the *Republic* is most often understood in terms of how the illusions of poetry influence and degenerate the soul. Poetry, it is argued, is efficient because its subjects lack the ability to evaluate the deceptive imagery it presents and this imagery is taken to be corrupting because it is "at a third remove from the truth" (599d).[1]

However, in the light of Plato's discussion of how the illusions of poetry are adapted to its addressees, there are reasons to question this view. As this paper sets out to argue, the poets cannot construct false images and impose them on their subjects at all – because the illusions of the poets are merely reproductions of the conceited sentiments and convictions of already corrupted souls. As we shall see, the nature and efficiency of poetry is better understood as a part of the mechanisms of appetite formation and in terms of what Plato calls *Diomedean necessity*.

---

[1] So, e.g., Lorenz (2006), Moss (2008, 35), Ferrari (1989), Nehamas (1982), Belfiore (1983) or Burnyeat (1999). For discussion, esp. of Moss (2008) and Lorenz (2006), see below.

The paper proceeds as follows. The first section argues that all souls prone to be affected by poetry have what Plato calls "a multiform character". Against the background of the psychology of book four and nine of the *Republic*, the second section suggests that this type of character is best described in terms of a soul condition governed by its non-rational and appetitive part. The third section argues that the mechanisms of poetical illusion should therefore be understood in terms of what Plato describes as a circle of imitative reproduction called *Diomedean necessity*. The paper concludes by arguing that poetry, for Plato, is morally corrupting, not because it is a false echo of ultimate reality, as is often taken to be the case, but because it mirrors and strengthens an already corrupted illusion.

1. The Addressee of Poetry

Although Plato's account of the addressee of poetry is most explicit in book ten, the basic idea is prepared already in book three. Poetry is used for educational purposes in childhood, because children cannot properly distinguish its underlying meaning. Children are not able to understand reason (λόγος, 402a2) and they are influenced by poetry because they lack rational judgement. "For the young", Socrates explains, "are not able to judge (κρίνειν) what is, and what is not, the underlying meaning (ὑπόνοια)" (378d6-e1).[2]

In book ten the same idea is spelled out in less forbearing terms. Those souls that are affected by the illusions of poetry are not able to listen to reason.[3] Instead they will think that what they see is what they get and their actions will be unmediated and direct. Poetry – just like scene-painting and witchcraft – will exploit this weakness (cf. 602c10-d4). It will address the non-rational part of the soul and it will try to influence it directly. It is as such, Socrates explains, that poetry affects children and other senseless people (598c2). Without the ability to count and measure and weigh, they do not have the ability to dismantle the illusions of the poets (cf. 603c-d). These operations are exclusive to the rational or calculative (λογιστικός) abilities of

[2] The proper tool to judge (κρίνειν) is reason (λόγος) and only a philosopher has the proper tool (cf. 582d). All translations, if not otherwise stated, are based on Grube and Reeve, in Cooper (1997). The Greek is Burnet's (1903).

[3] On the apparent contradiction between the account of poetry in books two and three and the account offered in book ten, see Moss (2007, 417).

their souls (602d-e), and for this reason, Socrates concludes, poetry should not be able to affect those with a properly working rational soul.[4]

> Clearly, then, an imitative poet isn't by nature related to the part of the soul that rules in such a character, and if he's to attain a good reputation with the majority of people, his cleverness isn't directed to pleasing it. Instead, he's related to the excitable and multiform character (ποικίλον ἦθος) […][5] (605a1-6).

In contrast to a character who can be distinguished by means of the active ability to expose the veils of the illusionists, the primary addressee of poetry is an excitable (ἀγανακτητικός) and multiform (ποικίλος) type of character (ἦθος). This is a person who is not disposed to listen to reason. And in this person there is also a conflict. Reason tells him one thing, and another part something else. He is "at war with himself", we learn; and holds "opposite beliefs about the same thing at the same time" (603d1-3).[6] Socrates explains what he means in terms of optical illusions.

> [T]he same things appear bent and straight to those who view them in water and out, or concave and convex, owing to similar errors of vision about colours, and there is obviously every confusion of this sort in our souls. And so scene-painting in its exploitation of this weakness of our nature falls nothing short of witchcraft, and so do jugglery and many other such contrivances (602c10-d4).

In the case of the multiform and excitable character there is a conflict.[7] And poetry, just like scene-painting, takes advantage of this conflict. Pertaining to the poetical art of imitating human action in grief or joy (cf. 603c), poetry speaks to our doubts and inner conflicts. Is it not the same, Socrates asks, with poetry as with scene-painting? Does it not try to take advantage of persons with self-conflicting points of views?

---

[4] I write *should be* because it is clear that even those with rational abilities can sometimes be affected, cf. 605c and 606a. For discussion, see Lorenz (2006, 64).

[5] "because it is easy to imitate", Socrates adds. I shall return to this qualification below.

[6] For this use of belief (δόξα), see Lorenz (2006, 61 & 67f).

[7] Judging from what we can learn about psychic civil war from book four (443c-444c), this is a person who is not properly unified, because that part of him that is prompt to believe the illusion disturbs the unified order that would establish itself, reason ruling.

> Is a man, then, in all this of one mind (ὁμονοητικῶς […] διάκειται) with himself, or just as in the domain of sight [i.e. the optical illusions] there was faction and strife and he held within himself contrary opinions at the same time about the same things, so also in our actions there is division and strife of the man with himself? But I recall that there is no need now of our seeking agreement on this point, for in our former discussion we were sufficiently agreed that our soul at any one moment teems with countless such self-contradictions (603c10-d7).

As is fairly common knowledge, and as the last quotes reveal, Plato's account of the character-type affected by poetry is framed in an argument for a division of the soul. As Jessica Moss has pointed out, the example of the optical illusion, as it is construed to also be explanatory for poetry, is designed to show that there are two soul parts in play.

> In Book 10 […] Socrates […] argues for a divide between the rational part and some other part of the soul […] At 602c-603a he gives an argument based on the cognitive dissonance that sometimes occurs when we experience optical illusion: the rational part calculates the truth and believes in accordance with its calculations, while an inferior part believes that things are as they appear (Moss 2008, 35).

Faced with an optical illusion, a conflict appears. On the one hand, one sees the painted wall as concave or convex, and on the other, rational calculation operating, one realizes that it is really flat. This gives rise to a conflict in how one perceives reality. And since the main task of the rational or calculative part of the soul is to do the evaluation, it cannot be this part of the soul that accepts the appearance of the illusion.

> [That] which puts its trust in measurement (μέτρον) and calculation (λογισμός) must be the best part of the soul [and thus] that which opposes it must belong to what is the inferior part in us (τῶν φαύλων ἄν τι εἴη ἐν ἡμῖν) (603a4-7).

Parallel to the argument from optical illusion, there is also another argument that makes the same point. When someone experiences a great misfortune, Socrates argues, he is often faced with two opposing motivational forces. On the one hand he feels that he wants to express his sadness and do many things in private that he would be ashamed to do in public (604a). Yet, there is also something in him that tells him to do the opposite, on the other. Reason and norm ("λόγος καὶ νόμος"), Socrates explains, will offer resistance. Reminding us of the *principle of opposites* articulated in book four (436b-c), Socrates concludes that "where there are two opposite impulses (ἀγωγή) in a man at the same time about the same thing we say that there must needs be two things in him" (604b3-4). First, then, there is one part of this man's soul that will obey reason and norm and try to keep calm. Second, there is another part of his soul that will make him behave like a wailing child (παῖς, 604c). The first part, in its wish to heal the pain, is ready to listen to rational argument or calculation (λογισμός, 604d5), while the second part, driving us back to the pain, is irrational (ἀλόγιστος), passive (ἀργός) and a friend of cowardice ("δειλίας φίλον", 604d10).

The relevant example of poetry in this case, I believe, is when one is or is not similarly affected by the misfortune expressed in tragedy. Socrates spells it out a few lines down.

> I think you know that the very best of us, when we hear Homer or some other of the makers of tragedy imitating one of the heroes who is in grief, and is delivering a long tirade in his lamentations or chanting and beating his breast, feel pleasure, and abandon ourselves and accompany the representation with sympathy and eagerness, and we praise as an excellent poet the one who most strongly affects us in this way (605c10-d5).

There is one part of this man's soul that will listen to reason and try to keep calm, and there is another part that will make him loose himself, and join in the grief or pleasure of the hero.

In arguing against the claim that the argument from optical illusion cannot be said to pertain to the same soul parts as the argument from emotion, Moss points our attention to 605b-c, which she translates as follows.

> [T]he imitative poet…, by making images (εἴδωλα) far removed from the truth, gratifies that part of the soul that is thoughtless and doesn't distinguish greater things from lesser, but thinks that the same things are at the one time large and another small.[8]

[8] Moss' translation (2008, 45).

Here, Moss argues, Socrates makes it clear that the two arguments for the division of the soul are designed to make the same point. “The imitative poet”, she writes, “appeals to the part of the soul that believes that a person standing at a distance is smaller than he was when standing closer – that is, to the part of the soul that perceives and believes optical illusions” (Moss 2008, 45).

Hendrik Lorenz has argued in similar terms. “In fact”, Lorenz writes, “he [Socrates] goes out of his way to make it clear that he takes imitative poetry to appeal to the same part that painting [i.e. optical illusion] appeals to” (Lorenz 2006, 63). Lorenz also reminds his readers that Socrates at 605c (in describing that part of the soul which is easily excited to grief and pleasure) most probably is referring back to 602c-603b (where the optical illusions of the scene-painters are described).

Granted that Moss and Lorenz are right, we also have reason to ask how this distinction squares with the psychology made earlier. At this point in the dialogue, Socrates’ general psychological framework has already been spelled out. Initiated in book four and supplemented in book nine, Socrates has already shown than the soul can be analysed in three parts, that these three parts can be distinguished in terms of their objects of desire (ἐπιθυμία), in terms of their specific pleasure (ἡδονή), and that we accordingly also can distinguish three types of soul conditions depending on what soul-part is the ruling principle (ἀρχή), i.e. the condition of the philosopher, the condition of the victory-lover and the condition of the soul ruled by its appetitive part. Socrates cannot of course have forgotten this when he here, in book ten, comes to argue about poetry. And it seems fairly safe to claim that we have reasons to understand the twofold distinction made in book ten against the background of the threefold made earlier.

Judging from how Socrates articulates the matter, it is also clear that the illusion-believing part of book ten “is or includes appetite and spirit”, as Moss formulates the matter (2008, 42). Let us look at the passages that seem to make this plausible:

> Clearly, then, an imitative poet isn’t by nature related to the part of the soul that rules in such a character [i.e. a rational and calm character], and if he’s to attain a good reputation with the majority of people, his cleverness isn’t directed to pleasing it. Instead, he’s related to the excitable and *multiform character* (ποικίλον ἦθος) […] Like a painter, he produces work that is inferior with respect to truth and that appeals

> to a part of the soul that is similarly inferior rather than to the best part. [H]e arouses, nourishes, and strengthen this part of the soul and so destroys the rational one (τὸ λογιστικόν) […] Similarly we say that an imitative poet puts a bad constitution in the soul of each individual by making images that are far removed from the truth and by gratifying the irrational (ἀνόητος) part (605a2-c2, my italics).

And later down the line:

> And so in regard to the emotions of sex (ἀφροδισίων) and anger (θυμοῦ), and all the appetites (πάντων τῶν ἐπιθυμητικῶν) and pains and pleasures of the soul which we say accompany all our actions, the effect of poetic imitation is the same. For it waters and fosters these feelings when what we ought to do is to dry them up, and it establishes them as our rulers when they ought to be ruled (606d1-5).

Both Moss and Lorenz interpret these passages to mean that the illusion-believing part is or includes the appetitive part *and* the spirited part (Moss 2008, 45 & Lorenz 2006, 65). Firstly, it is clear that it cannot be the rational part (τὸ λογιστικόν), since poetry is not supposed to water but destroy this part. Secondly, it is reasonable to believe that poetry appeals to the appetitive part, because poetry is supposed to water all appetites ("πάντων τῶν ἐπιθυμητικῶν"). Thirdly, we have reason to think that poetry occasionally also speaks to the spirited part, because poetry may also water spirit or anger (θυμός).

In addition to this way of trying to square the threefold division of the soul in book nine (and in book four), with the twofold division of book ten, so as to further understand to whom poetry is primarily addressed, we also have reasons to read these passages in terms of the *character-type* to which poetry speaks.

In accordance with what we have seen so far, it is thus possible to distinguish four interconnected criteria that must be satisfied by the character-type who is supposed to be liable to be affected by poetry. (1) There must be a possibility for conflict in his soul. He must be liable to have one part of his soul tell him one thing (i.e. the rational or calculative part) and another part something else (i.e. the illusion-believing part). (2) In view of this conflict, he must also be disposed to often side with the illusion-believing part. He must be easily excitable (ἀγανακτητικός) and he must be heavily influenced by what his illusion-believing part tells him. (3) In effect, he cannot be ruled by reason, because reason, by means of calculation and reasoning, would make him immune to the poetical illusions. And (4) he must also be possible to describe in terms of being multiform (ποικίλος). Accordingly, it is also possible to imagine three scenarios by means of which we can test which character-type will do.

In the first we have a philosopher (φιλόσοφος). As book nine reads, a philosopher desires truth and knowledge, takes pleasure in such and is ruled by his rational and calculative part (581b-e). Since the philosopher will only believe what the rational part says, the philosopher will see through the poetical illusion and will not be affected. In accordance with the four criteria described above the philosopher can be excluded: (1) There are no conflicts in the philosophers' soul (cf. 444b). (2) The philosopher does not listen to the illusion-believing part. (3) The philosopher is ruled by reason and (4) is never described to be multiform.

In the second scenario we have a lover of honour and victory (φιλόνικος) listening to the poem. The victory-lover has a desire for power, victory, honour and a good reputation (581a-c). He takes pleasure in such things and is ruled by the spirited part of his soul (439e and 581a-b).[9] Not being ruled by his rational part, he will not be immune to the poetical illusion. The lover of victory and honour may occasionally also be affected by the poem, it seems, *but* mainly insofar as it corresponds to his particular desire. We can imagine him listening to a poem articulated in the vein of the Leontius example (cf. 439e). Let us say that the poem describes the tragic separation of a child and her mother transformed into the guises of a fawn and a white-tailed deer. All the children around the victory-lover start to weep. Eventually the poem also starts to get to him. He feels how his eyes start to water and how his nose starts to tickle. In this situation we can imagine his spirit to kick in. He will not allow himself to be embarrassed in this way. What if somebody would see him? If he starts to weep like a child (cf. 604c), he will become a laughingstock. He becomes angry with himself and the spirited part of his soul will accordingly resist the message of the poem. Yet, he will not get angry because the poem excites spirit or anger, but rather because he realizes that he cannot allow the poem to affect him, that is, if he is to keep behaving in an honourable way. In contrast to the case of the philosopher, it will not be his rational part that makes him resist the message of the poem. Instead it will be his pride and his desire not to become embarrassed. So,

[9] Cf. Cooper (1985).

although we can imagine poems of honour and glory, which he most likely will devour with great pride, there are also reasons to think that he will not accept everything he hears. In referring to Socrates' argument from emotion (603e-604e), Lorenz makes a similar point:

> From spirit's point of view [ruling in the victory-lover], it is a disgrace for a man to behave that way (cf. 605 E 4) [being affected by the grief or pleasure of the poem's hero]. Any enjoyment we may get out of *such* imitation therefore must belong to a part of us below reason and spirit (Lorenz 2006, 63).

In accordance with the four criteria described, we can also test if the victory-lover fits the picture. (1) Since he is not ruled by reason, there might certainly be a conflict in his soul. (2) But it is not as clear that he always, or even often, sides with the illusion-believing part, at least not insofar as this part of his soul is also to extend beyond the desire for honour and victory. (3) He is not ruled by reason, yet (4) he is never described to be multiform. He does not seem to be a perfect match.

In the third scenario we have that character-type called a lover of profit (φιλοκερδής) listening to the poem (581e). As we soon shall see in more detail, this character-type desires a multitude of things, he takes pleasure in them all, and his motivations do primarily spring from that part of him from which his multiform (ποικίλος) desires also spring. Indeed, one of those personality types described in book eight and nine as being dominated by this multiform part of the soul is also called multiform. Moss (2008, 43) articulates the relevance of this last point perceptibly:

> 'Multicolored' [or *multiform*, as I translate ποικίλος] has earlier been used to describe the democratic character, who is ruled by his appetites (561e; cf.557c, 588c, 559d), and to describe the appetites themselves (588c; see also 404e).[10]

[10] In the *Republic,* there are three character-types or soul conditions that are described to be primarily ruled by the appetitive or multiform part of their souls: the oligarch, the democrat and the tyrant. Two of these characters types also seem to fit the profile of the one liable to be affected by poetry in book ten: the democrat and the tyrant; the democrat because he is explicitly said to be multiform (ποικίλος, 561e, cf. also 557c and 559d) and the tyrant because he is the primary example of a character who is totally ruled by the multiform (ποικίλος) part of his soul. The oligarch does not seem to fit the profile because he is someone that forbids anything that is not instrumental for making a profit. He will censure anything that has to do with unnecessary

Not listening to his rational or calculative part, the character-type ruled by his multiform (ποικίλος) soul-part will certainly be liable to believe the poetical illusion. Poetry will speak to the part of his soul that motivates him. It will water it, make it stronger (605b and 606d), and the multiform character will have no reasons to resist. In accordance with the four criteria described above, we can also test if this character fits the picture. (1) Since he is not ruled by reason, there might certainly be a conflict in his soul. (2) Being primarily influenced by the appetitive part of the soul, he will mainly, if not always, side with his illusion-believing part. (3) He is not ruled by reason, and (4) he can certainly be described in terms of being multiform (ποικίλος).

Accordingly it seems reasonable to draw two general conclusions with regard to the addressee of poetry. It is (a) justified to think that the illusion-believing part of the soul in book ten corresponds to the appetitive and spirited parts of book nine (and four). And (b) as I, with Lorenz, want to qualify the matter, we also have reasons to think that although both spirited and multiform character-types may be affected by poetry, the primary addressee of poetry is the multiform type. But what, then, is the soul condition of this character-type like?

2. The Multiform Soul

Drawing on book four's account of the tripartite soul, the details of psychological multiform is spelled out in book nine. As is well known, the human soul is here imagined as if it would be like some ancient creature. It is somewhat like the Chimaera, the Scylla or the Cerberus. Encapsulated in the shape of a human it consists of three parts. The smallest part is supposed to look like a human and the second smallest part like a lion. The third part, i.e. that part which is the ruling principle (ἀρχή, 580d) in the soul condition we are dealing with now, is described in the following way.

> Mould, then, a single shape of a multiform (ποικίλος) and many-headed (πολυκέφαλος) beast that has a ring of heads of tame and wild beasts and can change them and cause to spring forth from itself all such growths (588c7-10).

This part of the soul is the biggest. It is irrational (ἄλογος, 591c6). And it is understood in terms of being like a multiform and multi-headed beast

---

desire and pleasure. For discussion, see Annas (1981, 134 &142), Brown (2012) and Moss (2008, 43).

(θηρίον). The heads of the beast sit in a ring and consist of a mixture of wild (ἄγριος) and tame (ἥμερος) ones. The forms of these heads can change and be transformed by the monster itself ("ἐξ αὑτοῦ", 588c9).[11] In the case of the character-type Socrates describes to be ruled by appetite, it is also this multiform and multi-headed beast that calls the shots (581b-c).

In view of its lack of reason and its multiform nature, Socrates has a few Stephanus pages earlier also offered an explanation of how this beast-like part of the soul might manifest itself. At the beginning of book nine, Socrates explains what happens at night. When we sleep, the reasonable (λογιστικός, 571c4, cf. 439d) and tame (ἥμερος) part of the soul falls asleep and the wild (ἄγριος) and beast-like (θηριώδης) awakens (571c). Filled with food and wine, Socrates goes on, the beast-like part of the soul shakes the sleep away and skips out trying to live up to its peculiar character (ἦθος, 571c). As such, it is also totally out of bound, Socrates explains. It allows itself to do anything.

> It does not shrink from attempting to lie with a mother in fancy or with anyone else, man, god or animal. It is ready for any foul deed of blood; it abstains from no food, and, in a word, falls short of no extreme of folly and shamelessness (571c9-d4).

However unappealing the ways of this part of the soul are described to be, there is, as Socrates goes on to explain, no escape. It is there in each and every one of us. The evidence is obvious, Socrates argues, and at night, in the visions of our dreams, it makes itself manifest. It persists, he explains, even in the most moderate of souls (572a-b). Even if we may want it to resist it and although we may perhaps be able to control it (589a-b), neither reason nor argument can make it go away.

Given the evidence from our dreams, the wild and tame heads of the multi-headed beast are also given a further explanation. A few lines above, in the description of what happen at night, Socrates introduces something he calls unlawful (παράνομος) appetites (ἐπιθυμίαι). The unlawful appetites, he explains, are also unnecessary (μὴ ἀνάγκη), and they are present in us all, though they are more or less tamed in different persons (571b). It is also under these headings that the appetites he has just described falls.

[11] For a discussion of what these different parts of the monster, and its different heads, represent, see Perry (2007, 408ff). See also below.

Besides being an articulation of the difference between *lawful* and *lawless* appetites, this is most likely a reference to 558d, where Socrates makes a more elaborate distinction between *necessary* and *unnecessary* types of appetites. Here Socrates explains that unnecessary appetites are always abundant, but as such also redundant (559c). While necessary appetites are exemplified by bread and relishes, insofar as they aid the wellness of the body, unnecessary appetites are given a somewhat more evasive description. They are characterized in terms of honey (μέλι, 559d), and the image we get has to do with the many possible and impossible types of honeys that we may imagine if we would spend a day or two in the wildness of bestial pleasure (559d).

Accordingly, it is also possible to spell out the taxonomy that Socrates has in mind. Appetite can be either necessary or unnecessary. Necessary appetites can be understood in terms of food and drink. Unnecessary appetites can either be in accordance with law or they can be lawless. Lawless appetites can be exemplified by incest or bestiality, while unnecessary yet law abiding appetites can be exemplified by, say, prostitution or other kinds of (what in Plato's time was) legal sexual-overindulgence (cf. 559c and 571c-d).

In trying to reconcile this taxonomy with the image of the multi-headed beast offered at 588c, Richard Perry has argued that even though it might seem natural to identify the wild heads of the many-headed beast with the unnecessary appetites, and the tame heads with the necessary, such an explanation may cause more problems than it solves (Perry 2007, 409). Indeed, if we are to juxtapose the passage on the multi-headed beast with the passage on dreams, all of the heads are really unnecessary and unlawful (571b). At night, while our tame part is still asleep, the beast-like part of our soul awakens, and the whole of this beast-like part of the soul is described to be wild (ἄγριος, 571c5). So, even though this part of the soul is supposed to have both wild and tame heads, the part itself is described to be wild.

Regarding this problem, and the general problem of how to capture and determine this part of the soul, it might be helpful to make a methodological point. For although the distinction between the necessary and the unnecessary appetites (lawful and lawless) fills a function in determining the moral value and taxonomical scope of the appetite in question, this distinction does not help us to determine the nature of what we are trying to understand. The many heads of the multi-headed beast may be wild and tame. There is certainly a difference in the way they are supposed to be regarded. Likening the heads of the beast to a farmer's field, Socrates also points out that we should grow the tame ones and get rid of the wild (589b). But this does not really explain what these heads are or what they may change into (cf. 588c). Indeed, Socrates' account of their shared and more fundamental nature is also spelled out in a different set of terms.

Regarding the first and second parts of the soul, i.e. the human and the lion, there seems to be no greater problems in determining their natures. This is done, simply, by looking at their objects. The human part desires knowledge and truth (581b) and the lion part desires victory and honour (581a). Their distinctiveness as different soul parts and as different sources of motivation seems to lie in the different natures of their objects. As it comes to the third part, however, Socrates is much more cautious, and his description of this part as the appetitive part is carefully qualified.

> One part, we say, is that with which a man learns, one is that with which he feels anger. But the third part, owing to its manifold forms (διὰ πολυειδίαν), we had no one peculiar name to give to it (ἑνὶ οὐκ ἔσχομεν ὀνόματι προσειπεῖν ἰδίῳ αὐτοῦ), but gave it the name of its biggest and strongest element; for we called it the appetitive (ἐπιθυμητικόν) part because of the intensity of its appetites concerned with food and drink and love and their accompaniments (περὶ τὴν ἐδωδὴν ἐπιθυμιῶν καὶ πόσιν καὶ ἀφροδίσια καὶ ὅσα ἄλλα τούτοις ἀκόλουθα) (580d10-e4).

Because of its multiform-ness ("διὰ πολυειδίαν"), Socrates explains, the multi-headed part of the soul cannot be given any one, single and peculiar (ἰδία, 580e1) name. Calling it *appetitive* ("ἐπιθυμητικόν"), in the sense of being oriented towards such things as food, drink and sex, may give us a hint of the objects it *may* pertain to, but this name does not as such determine or exhaust it (cf. 580e). Many other names are presumably possible (Annas 1981, 129). Socrates does, for example, remind us not to forget that this part's desire for food, wine and sex is equally strong as its desire for money. And therefore, Socrates explains, it must also be called the money-loving (φιλοχρήματος) part (580e).

> [W]e called it the appetitive (ἐπιθυμητικὸν) part because of the intensity of its appetites (ἐπιθυμιῶν) concerned with food and drink and sex and their accompaniments, and likewise the money-loving

> (φιλοχρήματον) part, because money (χρῆμα) is the chief instrument for the gratification (ἀποτελοῦνται) of such desires (580e2-581a5).

Although it might be argued that there are reasons to think that Socrates calls this part of the soul money-loving because it is supposed to have just as many objects of desire as money can buy, Socrates' primary reason for calling it money-loving is because of the instrumental value of money. A money-lover is not someone that loves money because he likes the way it feels in his hand. He loves money because they can help him to gratify (ἀποτελέω, 581a5) his appetites. The soul part Socrates here describes in terms of being money-loving is most likely also called this in virtue of the multiform (ποικίλος) nature of its objects of desire (588c).

But all of this may seem to be insufficient. Since the two other parts of the soul can be determined and defined, it would also seem possible to determine and define the multi-headed part. Just as in the case of the other parts of the soul, one may be inclined to think that there should be a way of identifying it by means of specifying what kind of objects are particular to this type of desire as opposed to the other. Yet, as it seems, in this case such a type of identification causes problems. As it comes to appetite and to the character-type ruled by appetite, the possible objects of desire are described to be so diverse that they cannot be properly exhausted. But how, then, are we do understand this?

Socrates account of poetry offers an important clue. And although it does not precisely specify the particular type of object pertaining to appetite, it does tell us something important about the process of how its objects are set and about the scope of what may be involved. Let us take a closer look at this.

3. Diomedean Necessity

As we have seen, poetry is primarily addressed to a character-type that Socrates describes in terms of being multiform (605a). This type of character is not disposed to listen to reason; and not listening to reason, it will not be able to properly evaluate a poetical illusion when faced with one. Of this the poet will try to take advantage. Accordingly, the poet will not address or relate to someone that will not be affected, but "[i]nstead, he's related to the excitable and multiform character (ποικίλον ἦθος)" (605a5). Poetry speaks to that part of this character's soul that is the ruling principle (ἀρχή). And, as we have seen, this is the appetitive part. Poetry waters and strengthens it (cf.

605b and 606d). In fact, when the multiform character listens to poetry he will also be deeply moved. He will give in (ἐνδίδωμι), Socrates explains (605c-d). He will share the grief and pleasure expressed by the poem, and when influenced in this way, his disposition will also be deeply affected (cf. 605c-606d). Socrates explains how this works in terms of tragic poetry and its staging.

> If you reflect, first, that the part of the soul that is forcibly controlled in our private misfortunes and that hungers for the satisfaction of weeping and wailing, because it desires (ἐπιθυμεῖν) these things by nature, is the very part that receives satisfaction and enjoyment from poets, and second, that the part of ourselves that is best by nature, relaxes its guard over the lamenting part when it is watching the sufferings of somebody else. […] I suppose that only a few are able to figure out that enjoyments of other people's sufferings is necessary transferred to our own and that the pitying part, if it is nourished and strengthened on the suffering of others, won't be easily held in check when we ourselves suffers (606a3-b8).

Relaxing our rational guard only for a few moments, the poem will nourish and strengthen that part of our souls that has an appetite for weeping and wailing. And the disposition thus established will also be transferred into our private lives. Faced with sorrow or joy in private, Socrates says, we will start to behave like we behaved when we were enjoying the poem. It does not seem to matter if it is tragic, comic or erotic (cf. 606c-d). Poetry will establish the desire awakened so that we will feel in private what we feel at the theatre. The objects pertaining to the appetites of the poem's hero will thus also establish themselves in the poems' addressee. He will start to desire what the hero desires and he will start to feel like him.

Not everybody, however, needs to be affected in this way. Keeping the rational part of our souls awake and at its guard, the influence of poetry should be possible to avoid. Instead of listening to that part of our souls that is affected by the poetical illusions, we may listen to reason, look at the poem for what it really is, measure and weigh it, calculate and reason about it, and thus realize that the behaviour staged by the poem is merely a game, as Socrates says (602b).

For the multiform and easily excitable character, however, this is not an alternative. Not listening to reason and being primarily dominated by the appetites and sentiments of his illusion-believing part, he will be deeply affected by what he hears and sees. The disposition thus awakened in the theatre will be transferred to his character. Just as the wailing hero on the stage, he will weep and cry when he suffers misfortune, and just like the hero in the comedy, he will become a comedian (κωμῳδοποιός) in private ("ἐν τοῖς οἰκείοις", 606c8). Poetry will deeply influence his soul and it will determine the way he acts and reacts. It will establish his objects of desire. As it seems reasonable to believe, it will determine how his motivations are disposed.

One crucial question in this context does of course concern the scope of what poetry may thus establish. Given the general definition of poetry spelled out at 603c, Socrates does also offer an answer. Poetry is a matter of representation. Poetry "represents (μιμεῖται) human action, forced or voluntarily and as a result of their actions supposing themselves to have fared well or ill and in all this feeling either grief or joy" (603c4-7). As Socrates also goes on to explain, the scope of poetical influence is however limited. Since poetry can only represent, it is limited by the already prevalent desires and motivations of the general public.

The argument for this is spelled out in terms of how poetry in general is nothing but illusion and simulacrum (φάντασμα, 599a2, cf. 598a-599c). The argument is familiar and we may find it, in a variety of forms, throughout Plato's works.[12] Poets (just like painters, sophist and other charlatans) lay claim to be all-knowing (πάνσοφος, 598d3-4), because they represent and portray everything with their art (598d, cf. 397a). A poet, Socrates says, must know all skills and all professions; if the poet is to be able to portray all kinds of persons, in all kinds of situations, he must know what he is going to portray. He must know all aspects of human life: warfare, generalship, city government, education, all crafts and arts, medicine and everything that has to do with human dignity and baseness (598c-599d). If a good poet, Socrates explains, is to make fine poetry about those subject matters he considers, he must also know what he is going to talk about (598e). But no one can know everything. And therefore the poets and their works must be shadows and illusions.

> But for all that, my friend, this, I take it, is what we ought to bear in mind in all such cases: When anyone reports to us of someone, that he

[12] E.g. *Apol.,* 22c or 22d, *Gorg*., 464c and 501a-b, *Soph.,* 231b-c or 233c-d, *Phdr.,* 275a-b or *Laws*, 811b or 819a.

> has met a man who knows all the crafts and everything else that men know, and that there is nothing that he does not know more exactly than anybody else, our tacit rejoinder must be that he is a simple fellow, who apparently has met some magician or sleight-of-hand man and imitator and has been deceived by him into the belief that he is all-wise, because of his own inability to put to the proof and distinguish knowledge, ignorance and imitation (598c6-d5).

Only someone without the proper ability to evaluate the knowledge of the poet will believe his illusions. In exemplifying this with painting, Socrates explains, children and senseless people will believe (598c2). They will believe that what they see is the real thing, and they will appreciate the images of the poets as if they were reality. But, of course, they are not. As Socrates insists, the images that the poets make have little with reality to do. Poetry only imitates what most people think is the case. The poetical art is only a kind of flattery. And, in fact, Socrates says, the poets neither know what they are representing nor do they have a correct opinion about this (602a8).

The argument for this is spelled out in terms of a flute. Suppose that the poet is to make a poem about a flute. There are three kinds of arts: (a) the art that uses the flute, pertaining to the musician, (b) the art that makes the flute, pertaining to the flute-maker, and (c) the art that represents the flute, pertaining to the poet. The musician knows how the instrument works and he knows whether or not a flute is good or bad. This he reports to the flute-maker. And accordingly the flute-maker gets a correct opinion (601d-e). The poet, however, gets nothing. He can neither play the flute nor does he listen to the flute-player when he is making his images. His art is neither based on knowledge nor on correct opinion. And instead of listening to those that know, the poet listens to the general public. He listens to the multitude.

> Yet still he [the poet] will none the less imitate, though in every case he does not know in what way the thing is bad or good. But, as it seems, the thing he will imitate will be the thing that appears beautiful to the ignorant multitude (602b1-4).

Instead of trying to get to know the real nature of the flute, by means of listening to someone that knows this, or at least to someone that has a correct opinion about this, the poet will be satisfied if he manages to make representation that the general public will approve and find beautiful. And since they, in general, know nothing about flutes either, it is all a matter of unfounded convictions (cf. 602b).

One reason Socrates offers in order to explain how this can be true is spelled out in terms of effort. Knowledge and correct opinion are hard things to represent. And since the poet really only is trying to influence the ignorant multitude, he has no motivations to get to know the reality of things.

> And does not the fretful part of us present many and varied occasions for imitation, while the intelligent and temperate disposition, always remaining approximately the same, is neither easy to imitate nor to be understood when imitated, especially by a nondescript mob assembled in the theatre? (604e1-5)

As we have seen, it is also for this reason that poetry is more akin to the multiform character than to the simple and unified one.

> Clearly, then, an imitative poet isn't by nature related to the part of the soul that rules in such a character, and if he's to attain a good reputation with the multitude (τοῖς πολλοῖς), his cleverness isn't directed to pleasing it [the simple and unified soul]. Instead, he's related to the excitable and multiform character (ποικίλον ἦθος) since it is easy to imitate (605a1-6).

The multiform character-type is just like the multitude. Not only is he just as easy to imitate, but he also shares the convictions of the many. When the poet is supposed to make his images, it is this he must take into consideration. Instead of trying to get to know the reality of things, the poet must learn what the ignorant multitude thinks is the case. And just as in the case of the flute, he must learn to represent this, that is, he must learn to represent not the way things really are (the real flute) but the way things appear to be for the general public (what the multitude thinks a flute is). Instead of representing how an intelligent person, with knowledge of the flute, would use and treat the flute, the poet will make an image of what the "nondescript mob" thinks is the case.

Back in book six, this line of thought is also eloquently captured. If one is to please the multitude, one must learn its moods and appetites.

> It is as if a man were acquiring the knowledge of the moods and appetites (τὰς ὀργάς […] καὶ ἐπιθυμίας) of a great strong beast which he had in his keeping, how it is to be approached and touched, and when and by what things it is made most savage or gentle, yes, and the several sounds it is wont to utter on the occasion of each, and again what sounds uttered by another make it tame or fierce, and after mastering this knowledge by living and spending time with the creature, and should construct thereof a system and art and turn to the teaching of it, knowing nothing in reality about which of these opinions and desires is honourable or base, good or evil, just or unjust, but should apply all these terms to the judgements of the great beast, calling the things that pleased it good, and the things that vexed it bad, having no other account to render of them, but should call what is necessary just and honourable, never having observed how great is the real difference between the necessary and the good, and being incapable of explaining it to another (493a9-c6).

In order to please the multitude one must study its moods and appetites. One must learn to understand what it likes and dislikes. And to get to know this, one must live and interact with it. One must observe the behaviour of the beast and spend time with it.[13] Only thus may one learn how to please it.

If we take a closer look at the description of what is going on here, one thing that presumably is supposed to strike the reader as absurd is the fact that the knowledge in play is totally void of moral concerns. According to Socrates' description, what we are dealing with is a situation where moral notions, like good and evil, are simply used as names of what the beast likes and dislikes. The knowledge that the beast-keeper has is knowledge of what the beast desires and enjoys. The beast-keeper is no inventor, but rather a flatterer and a parrot. He listens to the beast, learns what it likes and uses this so as to make it happy. Calling the object of its cravings good and honourable, it is a matter of pleasing the multitude by means of representing its moods and appetites. Socrates describes the situation in this way.

> If anyone approached the multitude (τοὺς πολλούς) to exhibit his poetry or some other piece of craftsmanship or his service to the city and gives them mastery over him to any degree beyond what is

[13] In the quote above, Socrates is describing the art of a sophist, but, as he goes on to explain, the situation is the same for the poet (493d).

> unavoidable, he'll be under Diomedean necessity, as it is called (ἡ Διομηδεία λεγομένη ἀνάγκη), to do the sort of thing of which they approve (493d3-7).

The Diomedean type of necessity ("ἡ Διομηδεία […] ἀνάγκη") Socrates here refers to is, in this context, a matter of being at the mercy of the multitude. The poet is driven forth by the many.[14] The poet and his products become subject to the approval of the mass. Instead of trying to influence them by means of telling them what truly is right and good, the poet uses words like *right* and *good* as names of what pleases and satisfies the moods and appetites of the many.

However we are to understand the details of this, the basic point is clear. Insofar as the poet makes his poetry to please the multitude, he is speaking to them in virtue of being subjects to their appetites. Yet, since the appetites of the multitude thus determine the scope and contents of his poems, the objects of appetite that his poems establish are objects that the multitude already has an appetite for. How these objects became desirable in the first place we learn very little about, although it is quite clear that they do not spring from rational considerations.

Judging from the examples we are offered, the mechanisms of the Diomedean necessity are apparently also something quite common. Supposedly, they are in play every day – in courtrooms, at the theatre, on the battle field and at most meetings of the community (492c-d). Here, we learn, the multitude is at its best. With loud voices and shouts of blame and praise, it strengthens its own convictions and appetites. And by means of some designated poet (cf. 493d), the multitude gratifies itself by making the poet praise what it has an appetite for, calling this good, and blame what it dislikes, calling this bad. As Socrates also makes perfectly clear, the situation is not *status quo*. Something happens. And as they sit there in the theatre the words of the poet bounces from the walls around. Just like the applause affirming him, his words are doubled like echoes. Gathering up to a great flood of resonant sound and noise (492b-c), Socrates says, the voice of the poet reflects and enhances the sentiments of the many (493d). The poet establishes and re-establishes their already unfounded convictions and appetites. It is a Diomedean circle.

[14] The expression *Diomedean necessity* might come from a story about Odysseus and Diomedes in which Diomedes drives Odysseus in front of him by means of striking him on the back with the flat of his sword. See Trzaskoma (2004, 87).

Summary and Conclusion

Poetry speaks to the weakness of our souls. It speaks to us when the voice of reason is silent. As such, the persuasive force of poetry is also most efficient as it comes to souls that are *multiform* (ποικίλος), that is, to souls whose motivations principally originate in that part of them that is likened to a multiform and multi-headed beast. The convictions and sentiments of such souls do not have their source in reason. Their motivations are not formed on the basis of rational calculation. Instead they are at the mercy of whatever appears to be the case. When Plato explains how the illusory imagery of poetry is internalized in the souls of its addressees, he is also quite clear in pointing out how poetry is corrupting. In contrast to how this is often understood, poetry is not corrupting because it merely misrepresents reality. Poetry is corrupting because it represents and re-establishes the appetitive sentiments of the general public. This is what Plato calls *Diomedean necessity*. By means of representing what the multitude already finds familiar, poetry deepens and re-establishes their already conceited convictions. And although it is clear that Plato thinks that these mechanisms can be exploited for educational purposes, he dismisses poetry because its echoes nourish the irrational cravings of our souls.

References

Annas, Julia. (1981). *An Introduction to Plato's Republic*. Oxford: Clarendon Press.

Belfiore, E. (1983). Plato's Greatest Accusation against Poetry. In F.J. Pelletier and J. King-Farlow (eds.), *New Essays on Plato*, *Canadian Journal of Philosophy,* Vol. 9.

Burnet, John (ed.) (1903). *Platonis Opera*, Oxford: Oxford University Press.

Burnyeat, M.F. (1999). Culture and society in Plato's Republic. *Tanner Lectures on Human Values* 20.

Brown, Eric. (2012). The Unity of the Soul in Plato's Republic. In Barney, Rachel, Tad, Brennan and Brittain, Charles (eds.), *Plato and The Divided Self*, Cambridge: Cambridge University Press.

Cooper, M, John (ed.) (1997). *Plato - Complete Works*. Indianapolis and Cambridge: Hackett.

----------. (1985). Plato's Theory of Human Motivation. In *History of Philosophy Quarterly*, Vol.1, No. 1.

Ferrari, G.R.F. (1989). Plato and Poetry. In G. Kennedy (ed.), in *The Cambridge History of Literary Criticism*, Vol. 1, Cambridge.

Lorenz, Hendrik. (2006). *The Brute Within – Appetitive Desire in Plato and Aristotle*, Oxford and New York: Clarendon University Press.

Moss, Jessica. (2008). Appearance and Calculation: Plato's Division of the Soul. In *Oxford Studies in Ancient Philosophy*, No. 34.

----------. (2007). What is Imitative Poetry and Why Is It Bad. In Ferrari, G.R.F (ed.), *The Cambridge Companion to Plato's Republic*, Cambridge: Cambridge University press.

Nehamas, Alexander. (1982). Plato on Imitation and Poetry. In J.M.E. Moravcsik and P. Temko (eds.), *Plato on Beauty, Wisdom and the Arts*, Rowman and Littlefield.

Perry, Richard. (2007). The Unhappy Tyrant and the Craft of Inner Rule. In Ferrari, G.R.F (ed.), *The Cambridge Companion to Plato's Republic*, Cambridge: Cambridge University Press.

Trzaskoma, M, Stephen, Smith, R, Scott and Brunet, Stephen (eds.) (2004). *Anthology of Classical Myth: Primary Sources in Translation*, Indianapolis: Hackett Publishing Company.

Olof Pettersson
Department of Philosophy
Uppsala University
olof.pettersson@filosofi.uu.se

Intuitionism Without Intuition: Against the Phenomenological Account

Giuseppina Ronzitti

Abstract
In this paper, we will consider the impact of the *intuitionistic philosophical program* on the *intuitionistic mathematical program*. In particular, we will concentrate on the phenomenological approach to the philosophy of intuitionism. We shall argue that recent attempts (such as that of Mark van Atten) to justify intuitionistic mathematics by appealing to Husserlian phenomenology are seriously contributing to the failure of the intuitionistic mathematical program. Our claim is that one of the main reasons for the failure of the intuitionistic mathematical program lies in the emphasis that is given to the philosophical program. Our thesis will be illustrated by an example: the phenomenological justification of the intuitionistic notion of choice sequence.

As a matter of fact, not much intuitionistic mathematics has been produced so far and, in this sense, we might say that the intuitionistic mathematical program is failing. Nevertheless, we think that the intuitionistic mathematical program might be defensible, but it should be defended directly, by the actual production of significant pieces of intuitionistic mathematics, rather than trying to legitimate its entities and principles of reasoning by appealing to philosophical theories.

It should be clear from the start that it is beyond the scope of this paper to criticize in detail the phenomenological approach to intuitionism. Our criticism is more of a methodological nature, and it amounts to saying that it does not appear to be a good strategy to require from mathematicians that they embrace phenomenology before actually doing intuitionistic mathematics.

1. Intuitionistic Mathematics and Philosophy

On a fairly acceptable reading, Brouwerian intuitionism is a *mathematical program*: it is about doing mathematics in a constructive way, approximately meaning without resorting to arbitrary conceptualizations, such as, for example, postulating the possibility of choosing an element among an uncountably infinite number of elements, without indicating how to make such a choice. On a more grandiose reading, one that in some sense has become the default reading, Brouwerian intuitionism is first of all a *philosophical program*, a program issued from a comprehensive philosophical idea that has a bearing on a wide range of topics of philosophical significance, one of which is mathematics. A good example of such a view is the following statement (van Dalen 1998: 212):

> Brouwer, from 1905 onwards, elaborated a philosophy, not just of mathematics, but an overall one, on the basis of a revised idealism in the sense of Kant. What distinguishes Brouwer from his fellow philosophers of mathematics, is that his philosophy is much more ambitious; Brouwer presents a full-blown philosophy that covers not just mathematics and science, but also epistemology, ethics, social philosophy.

Even allowing that Brouwerian intuitionism might be correctly intended as a *full-blown philosophy*, we think that nobody could deny that its outcome should be intended as supporting the development of intuitionistic mathematics.

With these two things both granted—namely, that intuitionism is first of all a philosophy and that it should be intended as promoting intuitionistic mathematics—let us now take note that no matter how much effort has been and is spent in further developing philosophical intuitionism, only a very restricted number of mathematicians adhere to the intuitionistic mathematical program by actively contributing to its development. This is a fact. The provocative thesis we shall be defending is that the view that *intuitionism is (first of all) a philosophy* not only does not actually foster the development of intuitionistic mathematics but rather does the contrary, namely it makes much easier for the supporters of classical mathematics to dismiss intuitionistic mathematics. This is particularly evident in the case of the phenomenological defense of intuitionism. In fact, as we shall argue later, the phenomenological approach to intuitionism offers a very simple way of rejecting intuitionistic mathematics.

If we were to learn intuitionistic mathematics just as mathematics, we would be straightforwardly introduced to its objects, principles of reasoning, axioms, rules, and so on, just as it happens for classical mathematics and set theory. Perhaps we would not even come to think that the entities of intuitionistic mathematics might not be really *objects*; we would probably just learn how to make mathematical reasonings with them and eventually would evaluate the conclusions they allow us to make, focusing on whether intuitionistic mathematics is bringing us new, useful, mathematical insight. Nevertheless, the thesis that intuitionism is first of all a philosophy demands that before we do any mathematics at all, we first learn the underlying philosophical arguments. These arguments have the aim of introducing and justifying the entities of intuitionistic mathematics and the way we reason about them. The claim is that in this case, unlike in the case of classical mathematics, a philosophical justification is needed, precisely because the entities of intuitionistic mathematics differ from the usual mathematical entities. In Mark van Atten's words (van Atten 2003: 4):

> Most mathematicians have been skeptical about Brouwer's solution from the beginning. The objects in classical mathematics—numbers, geometrical objects, sets—seem to be outside of space and time, never to change, and to exist independently of acts of any subject. Choice sequences behave in just the opposite way: they grow in time, according to the choices a subject makes. With such credentials, surely choice sequences should never be allowed into the mathematical universe—or should they? [...] I think that they should. *However, that claim needs a philosophical justification* (my emphasis).

A philosophical argument, therefore, is needed in order to legitimize the entities of intuitionistic mathematics as mathematical objects. If the entities of intuitionistic mathematics are recognized as legitimate mathematical objects, intuitionistic mathematics can be accepted as mathematics (as having mathematical content). Let us see, therefore, in which way phenomenology contributes to explaining why intuitionistic entities are indeed mathematical objects.

2. The Phenomenological Justification of Infinitely Proceeding Sequences

Just as in classical mathematics, in intuitionistic mathematics, there are primitive concepts and notions. A case in point is the notion of *infinitely proceeding sequence* of natural numbers (from now on, *ips*) or *choice sequence*. But, while basic concepts (such as *set* and *membership*) in classical mathematics are defined axiomatically, some non-mathematical introduction is felt as needed in intuitionistic mathematics. For example, typically, *ips* are introduced by describing them as entities that are generated by the more or less free unfolding of the idea of *two-ity* (Brouwer 1907: 8). Without entering in any detail,[1] suffice it to say that for Brouwer the idea of *two*-ity—that derives from the observation of the movement of the time as "the falling apart of a life moment into two distinct things"—is the basic *intuition of mathematics*. Making sense of the basic intuition of mathematics by providing a meaningful explanation of what the intuitionist means by *intuition* is, therefore, a necessary step in order to validate the status of *ips* as mathematical objects. According to the supporters of the phenomenological approach to intuitionism, phenomenology has the right conceptual tools for achieving such a goal (van Atten 2003: 4):

> I appeal to phenomenology, as developed by Husserl; who himself, by the way, would have rejected choice sequences, but, it can be argued, unjustly so (van Atten 1999). *It turns out that this phenomenological analysis has a mathematical consequence* (my emphasis): it justifies a particular principle in the theory of choice sequences, the principle of weak continuity (for numbers), for which so far there were only plausibility considerations [...]

The very strong claim (van Atten 2003: 3) is therefore that:

> If you *believe* (my emphasis) Husserl's philosophy of mathematics, then you should also accept Brouwer's choice sequences.

Let us therefore see how Husserl's philosophy of mathematics is applied to intuitionism and in which way it proposes to contribute to promoting the acceptance of infinitely proceeding sequences as mathematical objects.

2.1 Intuiting Mathematical Objects

The main motivation for approaching the intuitionistic philosophical program from a Husserlian phenomenological point of view is that intuitionism and phenomenology share, in a way, the same starting point—namely, that knowledge is a matter of intuition. In particular, they both (are taken to) maintain that "[...] knowledge refers back, directly or indirectly, to intuitions" where intuitions are meant to be "experiences in which objects are actually

1 See, for example, Placek (1999), ch. 2, sec. 2 (*Mathematics and Intuition*), pp. 29–47.

given as themselves" (van Atten 2003: 7). Mathematical knowledge—for example, knowledge of mathematical objects—is taken to be a matter of intuition in the previously specified sense.

This means that in this framework, "intuiting a mathematical object" should be intended as signifying "to have a direct experience of the object". The task that the phenomenologically minded intuitionist philosopher must face is therefore that of providing a philosophical account of the notion of *intuition of a mathematical object* as *direct experience of* a *mathematical object*. The intuitionist phenomenologist does this by describing how intuitions (in general) come about (van Atten 2007: 22):

> Intuitions, to be obtained, generally require a *series of mental acts* (my emphasis). This series of acts has a specific structure that depends on the kind of object to be intuited. The contents of our stream of experiences do not follow one another randomly but are systematically related.

Let us remember that *ips*, denoted α, β, γ, ... are sequences of natural numbers whose values are generated at stages. At any stage t_n, for $n \in \mathrm{N}$, of the construction of a sequence α, a value $\alpha(n)$ of the sequence is introduced together with some restrictions on the future possible values of the sequence. As it appears, the phenomenologist's description of how the act of intuiting happens seems to adapt to the standard description of how infinitely proceeding sequences come into existence.

The main characteristic is that both processes happen at stages as the outcome of a series of choices. In both cases, such choices depend on the previously acquired information. The claim of the phenomenologist is that in both cases, there is a *structure* that can be detected. In one case, it is the structure of a certain type of mathematical entity; in the other case, it is the structure of our experience of such entities. According to the phenomenologist, these two structures match (van Atten 2007: 22):

> There are structures that govern the flow of consciousness. Even what is normally called a 'flash of insight' is a systematic whole or synthesis of acts.

Words like "structure", "govern", and "systematic" are clearly intended to implicitly suggest that *intuition* is not such a nebulous concept—it is about something whose pattern of organization can be detected. Clearly, talking about the "structure" of a series of mental acts seems to be something more manageable than to talk about "intuition", "flow of consciousness", and the like. The phenomenologist's claim is that it amounts to the same thing.

What concerns us here is to see how this type of explanation is meant by the phenomenologist as addressing the main objections to intuitionism—for example, the objection raised by the classical mathematician to the legitimacy of *infinitely proceeding sequences* as mathematical objects. The phenomenologist claims to be able to explain how such entities should be understood so that they become acceptable.

We saw that *ips*, denoted α, β, γ, … are entities (sequences of natural numbers) constructed step-by-step in the course of time t_0, t_1, t_2, ... Given a sequence (or process of construction of a sequence) α, at each stage t_n, the value $\alpha(n)$ is constructed. For the intuitionist, such a construction is unfinished and unfinishable. This means that given any two sequences α and β whose development is exactly the same up to a finite point in time t_m (for $m \in \mathrm{N}$) of our actual construction, one cannot tell that they are indeed the same sequence, as one cannot know whether for all future t_{m+n} for $n, m \in \mathrm{N}$, $n > 0$, we will have $\alpha(m+n) = \beta(m+n)$. One cannot tell, either, that they are different, as this would imply that one is able to indicate a particular $k \in \mathrm{N}$ such that $\alpha(k) \neq \beta(k)$. For the classically minded mathematician, here is a clear difficulty, as she probably would not know how to deal with entities that are essentially undetermined. If we cannot tell whether a process of construction will generate one or more entities, if we cannot tell whether two processes of constructions are identical or apart from each other, we cannot affirm that the generated sequence is indeed an (individual) object. The mathematician, therefore, will probably try to get to know more, looking into principles of reasoning adapted to work with *ips* in a mathematical way.

The philosopher might see things differently. Confronted with the same situation, she will notice that what is missing is a criterion of individuation and will conclude that the possibility of attributing the ontological status of objecthood to *ips* should be figured out in a novel way. This is precisely what phenomenology claims to be able to do—namely, providing a type of criterion of individuation for *ips* that will make them acceptable as mathematical objects. Moving from the idea that intuitionistically there are no non-experienced objects, the phenomenologist will first of all consider the problem of individuation in relation to *our experience of the object* rather than in relation to objects themselves. As a consequence, the phenomenologist will provide an analysis of the *constitution of our experience* in relation to a certain entity, rather than an analysis of the constitution of the entity. The philosophical problem is therefore reformulated, since the question will not be whether *ips* are *objects* but whether *ips* are *objects of our experience*. How does this work?

Since from a phenomenological point of view, objects in general, and mathematical objects in particular, are to be seen as *invariants in our actual experience*, entities of intuitionistic mathematics will be considered as *objects (of our experience*) if we can show that in our experience of them there is such an invariant. The problem is therefore to eventually find the right invariant. This is not an easy task, because—remembering that we are not talking about objects but about our experience (or the experience of an idealized subject) of an object—there is no obvious candidate for what to consider an invariant. The relevant question is: what remains *invariant* in our experience of infinitely proceeding sequences? According to Mark van Atten, what remains invariant is the fact that we experience them as developing sequences whose development started at a particular point in time (van Atten 2003: 12):

> I suggest that what remains invariant is the character of the sequence as a developing sequence, a development that started at a particular point in time.

This is the phenomenological solution to the problem of the legitimation of *ips* as mathematical objects. According to the phenomenologist, the concept of *ips* can be further clarified as follows (van Atten 2003: 13):

> The way in which a choice sequence is an object has much in common with the way another, more familiar type of object is: a melody. An ongoing melody is experienced as an identity even though it has not been completed yet.

This is the type of argument that, according to the phenomenologist, should help in convincing mathematicians that the entities of intuitionistic mathematics are, indeed, legitimate mathematical objects. The phenomenologist goes further than that in claiming that the acceptance of the phenomenological approach is necessary for the right understanding of the intuitionistic point of view. This is the point we will discuss in the next, concluding, section.

3. The Impact of the Phenomenological Approach to Intuitionism on the Intuitionistic Mathematical Program

Summarizing, the claim that intuitionism is first of all a philosophy and that such a philosophy is intended (among other things) to provide a sound foundation to intuitionistic mathematics has as a main consequence that a philosophical approach to intuitionism should be elaborated in a way that is able to answer all the specific objections mathematicians normally raise when confronted with intuitionistic mathematics. In practice, the claim is that to find the answers to the foundational problems raised by intuitionistic mathematics, one should look into philosophy. Clearly, a philosophical defense of intuitionistic mathematics, in order to be effective, should prove itself to have very strong arguments, arguments that are able to counteract mathematical objections. The phenomenologist claims that such arguments can be found applying the phenomenological method.

There is a key fact to keep in mind—namely, that the acceptance of the phenomenological analysis is considered, in this context, an essential step towards the acceptance of intuitionistic mathematics. Since this is a very bold claim, it is important to evaluate what its consequences are. As the role of the philosophical intuitionistic program is to support the intuitionistic mathematical program, the relevant question is whether the phenomenological defense of intuitionism can really promote the acceptance of intuitionistic mathematics as mathematics. We think that in order to answer such a question, we should first ask to whom the phenomenological analysis is directed.

Obviously, the phenomenologist's argument trying to clarify in which sense infinitely proceeding sequences are genuine mathematical objects should be seen as addressing those who do not already accept infinitely proceeding sequences as such. We should then ask whether the phenomenologist's argumentation (outlined in section 2) may possibly be able to convince them. In order to discuss this, we will distinguish two cases: the case of those who refuse *ips* from a mathematical point of view while being philosophically neutral (and therefore possibly open to any philosophical approach) and the case of those who are neutral in respect to what is considered a mathematical object or not (and therefore willing to consider the entities of intuitionistic mathematics as mathematical objects) but are not sympathetic with the phenomenological approach. All the other possible cases are obviously not relevant in this context, as there is no need to convince those who are already convinced, accepting both intuitionism and phenomenology, and there is no way to convince those who strictly refuse both intuitionism and phenomenology.

First case: those who do not accept the notion of a sequence that develops over time as mathematically meaningful while perhaps remaining neutral as to which philosophical approach (if any) to embrace. To our view, those belonging to this class would not consider the type of *invariant* described by the phenomenologist as a palatable substitute for a more standard criterion of individuation. In particular, they would not see that the offered explanation adds new knowledge, new insight, of the type they are looking for. Being told that infinitely proceeding sequences are objects, as they are individuated as evolving processes that started at a particular point in time, they will not be able to find a single reason to accept such entities as the objects of their daily work. When, eventually, the phenomenologist will add, to clarify, that infinitely proceeding sequences are objects more or less in the sense in which a melody is an object, they will just conclude that there really is nothing new to learn.

In our view, a mathematician may well decide to work with mathematical entities, such as infinitely proceeding sequences, even in the case where there is doubt about whether such entities are legitimate mathematical objects or not. The important thing would be to know what to do with them—notably, to be acquainted with the adapted principles of reasoning. In intuitionistic mathematics, there are such principles of reasoning—the so-called *continuity principles*. This is all that the mathematician needs. Perhaps such a mathematician will think that the entities she is using are not really mathematical objects; still, she will perceive her activity as mathematics. This is the type of insight she looks for. On the contrary, the phenomenologist's attempt to justify infinitely proceeding sequences (section 2) will be perceived as being devoid of any mathematical significance. In conclusion, those belonging to this class will be prone to see that phenomenology is just adding a further difficulty. When confronted with the claim that philosophy should be accepted first, they will just raise a very simple objection by remarking that the proposed substitute for a criterion of individuation does not seem to be relevant enough and will reject intuitionism on the basis of its philosophy rather than on the basis of its mathematics.

Second case: those who are not sympathetic with the phenomenological approach while being willing to look into intuitionistic mathematics. Those belonging to this class clearly will not accept the phenomenological shift from "objects" to "experience of objects" as legitimate, no matter what such a shift is supposed to achieve. While for the first case it was a question of content, here, it is a question of methodology. Objects are one thing; experiences are another. Mathematics is not about *experiences*, they will observe. Mathematical conclusions and proofs, for them, are not conclusions and proofs about experiences. While the members of this class are not willing to accept phenomenology, they are open to looking into intuitionistic mathematics. Again, the important thing is to know what to do with the entities of intuitionistic mathematics, how to use them. For this, we need principles of reasoning. They will therefore simply look for such principles and perhaps will end up doing some intuitionistic mathematics. But, if before actually doing intuitionistic mathematics they come to believe that, as the phenomenologist claims, a phenomenological introduction is necessary, they will simply stop in their attempt. Also, in this case, intuitionistic mathematics will be rejected on the basis of its philosophy.

In conclusion, in our view, what the phenomenologist achieves in insisting that phenomenology should be accepted first, that its arguments and methodology should be applied in order to reach a real grasp of the entities of intuitionistic mathematics, is to offer a very easy ground for dismissing intuitionistic mathematics. In both of the cases we described, in fact, the dismissal of infinitely proceeding sequences as genuine mathematical objects, and therefore the dismissal of intuitionistic mathematics as mathematics, will not be based on mathematical reasons.

Acknowledgments
The author would like to thank the anonymous reviewer for valuable comments and suggestions.

References

Brouwer, L.E.J. (1907). *Over de Grondslagen der Wiskunde*, Ph.D. thesis, Universiteit van Amsterdam. English translation in (Brouwer 1975: 11–101).

Brouwer, L.E.J. (1975). *Collected Works. I: Philosophy and Foundations of Mathematics*, ed. A. Heyting, Amsterdam: North-Holland.

Placek, T. (1999). *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity* (Synthese Library Vol. 279), Dordrecht: Springer.
van Atten, M. (2003). Brouwer, as Never Read by Husserl. *Synthese* 137, Issue 1, pp. 3–19.
van Atten, M. (2007). *Brouwer Meets Husserl. On the Phenomenology of Choice Sequences* (Synthese Library Vol. 335), Dordrecht: Springer.
van Dalen, D. (1998). From a Brouwerian Point of View. *Philosophia Mathematica* 6, Issue 2, pp. 209–226.

Giuseppina Ronzitti
CNRS, UMR 8163 - STL - Savoirs Textes Langage, F-59000 Lille, France
ronzitti@gmail.com

Reply to ‘Intuitionism Without Intuition: Against the Phenomenological Account’

Mark van Atten

Abstract
I am grateful to Dr Ronzitti for having taken the time to consider a phenomenological account of intuitionism, and of choice sequences in particular, and write down her critical reflections on it. But I'm afraid that ‘Intuitionism Without Intuition: Against the Phenomenological Account’ does not do much to advance the discussion. My principal reasons for thinking so are threefold:

1. The paper's presentation of the phenomenological account of choice sequences is incomplete in an essential way.
2. Of the two imagined (and negative) reactions to the phenomenological account, the first one is incoherent and the second highly implausible.
3. The paper's view on the relations between mathematics and philosophy leaves a mathematics that is a mere formalism and that is unrelated to the content of intuitionistic mathematics as developed by Brouwer and his followers. The label ‘intuitionism without intuition’ that Dr Ronzitti gives to her proposed mathematics is misleading at best.

1. The paper's presentation of the phenomenological account of choice sequences

In her description and analysis of the phenomenological account, Dr Ronzitti refers to an article (‘Brouwer, as Never Read by Husserl’, van Atten 2003) and a book of mine (*Brouwer Meets Husserl*, van Atten 2007). Both the article (which is short, being the text of a talk at a conference) and the book answer the question if choice sequences are mathematical objects in two stages. First, are choice sequences objects at all? Second, are they specifically mathematical objects? I answer `yes' to the first question because a phenomenological analysis supplies me with an individuation criterion, and `yes' to the second question because, I argue, the objects thus construed are such that what is proved about them once is proved forever, they are purely formal in the sense that they do not depend on sense data, and they do not

Filosofiska Notiser, Årgång 4, Nr. 1, Januari 2017, 93–97

lead to truths that cannot be shared intersubjectively (in van Atten 2007, these are sections 6.3.1, 6.3.2, and 6.3.3, respectively).

In ‘Intuitionism Without Intuition’, however, the second stage is left out completely. Having presented just the first stage, Dr Ronzitti then concludes that thereby we have my answer to the question why choice sequences are mathematical objects. This is clearest when, on page 87, she quotes from my article (van Atten 2003: 12):

> I suggest that what remains invariant is the character of the sequence as a developing sequence, a development that started at a particular point in time.

and then comments that ‘This is the phenomenological solution to the problem of the legitimation of ips as mathematical objects’.

But it is not; and Dr Ronzitti never enters into the reasons I give for holding that these objects are not only objects but, specifically, mathematical objects. She stops quoting from the article ‘Brouwer, as never read by Husserl’ right before that paper's explicit transition to a discussion of the question why choice sequences are specifically mathematical objects; a discussion that begins on its page 13, final paragraph, and continues for more than two pages. And the corresponding, more detailed discussion of that question in section 6.3 of *Brouwer Meets Husserl* is never cited or referred to either.

More generally, it is astonishing that in a paper that aims to be a critical discussion of the phenomenological account, of the longest and most detailed of the two sources it uses, the book *Brouwer Meets Husserl*, exactly one page is ever referred to. This is its page 22 (which Dr Ronzitti refers to on page 85) of the chapter ‘The Original Positions’; thus, the further chapters ‘The Phenomenological Incorrectness of the Original Arguments’, ‘The Constitution of Choice Sequences’, and ‘Application: An Argument for Weak Continuity’ are passed over.

2. The two imagined reactions to the phenomenological account

In section 3 of her paper, Dr Ronzitti evaluates the impact of the phenomenological account by asking to whom it may be directed and what they would think of it. To my mind, she is wrong to hold (page 89) that the phenomenological account of exactly why choice sequences are mathematical objects cannot be meant for those who already accept both phenomenology and intuitionism. After all, one's acceptance of phenomenology or intuitionism or both may be based on general considerations, or on positive experience with them related to other objects than choice sequences. That leaves wide open the possibility that a particular phenomenological analysis of certain objects in intuitionistic mathematics may deepen one's understanding of them and lead to the discernment of further principles valid for them. (An example that, although referred to in a quotation on page 84, Dr Ronzitti otherwise ignores, even though it seems to be the kind of application she is asking for, is the phenomenological grounding of the Weak Continuity Principle in chapter 7 of *Brouwer Meets Husserl*.)

The first case that Dr Ronzitti considers, the case of 'those who do not accept the notion of a sequence that develops over time as mathematically meaningful while perhaps remaining neutral as to which philosophical approach (if any) to embrace' (page 89), is incoherent. For not accepting the notion of such a sequence as mathematically meaningful is just as much taking a philosophical stance as accepting that they are. Naturally, individual mathematicians may decide not to enter into that philosophical discussion in their own intellectual activity; but that does not amount to making the philosophical question go away. It is just a division of labour.

The imagined reaction in the second case that Dr Ronzitti considers, the case of 'those who are not sympathetic with the phenomenological approach while being willing to look into intuitionistic mathematics' (page 90), is highly implausible. The key claim is this: 'But, if before actually doing intuitionistic mathematics they come to believe that, as the phenomenologist claims, a phenomenological introduction is necessary, they will simply stop in their attempt.' But why on earth would someone who has little sympathy for phenomenology suddenly believe the phenomenologist on this point? And anyone who thinks that there is nothing to phenomenology is free to look for other reasons, be they philosophical or not, to adopt choice sequences. There is no reason at all, in this case, to let oneself be stopped by phenomenologists, whatever they shout.

3. The paper's view on the relations between mathematics and philosophy

Dr Ronzitti holds that mathematics can be done without philosophical worries over objects, and without philosophical worries more generally, because we would 'just learn how to make mathematical reasonings' (page 83); one just needs 'to be acquainted with the adapted principles of reasoning' (page 89); and mathematicians 'simply look for such principles' (page 90).

Of course an individual may choose to adopt that attitude; but in the abstract that resolves nothing. What Dr Ronzitti does not seem to realise is that the view she mobilises here leaves a mathematics that, in its lack of concern with objects (or perhaps the term ‘neutral’ should be used here, as on page 88) and hence with questions of meaning and truth, amounts to a mere formalism. For one thing, this view leaves it wholly unclear what the `new, useful, mathematical insight' she is striving for (page 83) would be insight into. For another, that mere formalism has nothing to do with intuitionistic mathematics as it was conceived by Brouwer and developed by Heyting, Troelstra, Van Dalen, Veldman, and others. Their intuitionistic mathematics is evidently based on philosophical considerations, namely considerations on the nature of mental acts, of mental objects, of evidence, of truth, of freedom, of intuition. Surely, then, the label ‘intuitionism without intuition’ that Dr Ronzitti gives to her proposed mathematics is misleading at best. As (in effect) a mere formalism, it has nothing to do with other varieties of constructivism either, nor, for that matter, with classical mathematics.

By cutting the ties between philosophical understanding and mathematical principles, the approach advocated by Dr Ronzitti leaves it inexplicable exactly why the choices of objects and principles governing them in intuitionistic mathematics so far have been fruitful for their purpose; and it blocks a road to motivating the introduction of further objects and new principles. And in cutting these ties, the paper sets up a false dichotomy between ‘the mathematician’ and ‘the phenomenologist’ (or ‘the philosopher’). Thus, it is overlooked throughout the paper that there have been a number of individuals who engaged both in mathematical thinking and in philosophical thinking, both of the highest order, in such a way that the two informed each other. One finds examples among constructive as well as classical mathematicians: Cantor, Hilbert, Brouwer, Weyl, Gödel, Martin-Löf. To take Gödel's case: he was a classical set theorist and a phenomenologist at the same time, who argued that a phenomenological foundation of classical mathematics should be looked for. Indeed, when on page 83 Dr Ronzitti says that the claim is that ‘unlike in the case of classical mathematics, a philosophical justification is needed’ to engage in intuitionistic mathematics, she is mistaken: phenomenologists claim that classical mathematics stands in need of such a justification just as much.

Let me conclude with a reference to well known literature. To my mind, the view on the relations between mathematics and philosophy expounded in ‘Intuitionism Without Intuition’ has been discredited effectively by Georg Kreisel in his paper ‘Informal rigour and completeness proofs’ (Kreisel 1967); the interested reader is referred to pages 140 to 143 (first two lines).

References

Kreisel, G. (1967). Informal rigour and completeness proofs. In Imre Lakatos (ed.). *Problems in the Philosophy of Mathematics*. North-Holland, pp. 138–157.

van Atten, M. (2003). Brouwer, as Never Read by Husserl. *Synthese* 137, Issue 1, pp. 3–19.

van Atten, M. (2007). *Brouwer Meets Husserl. On the Phenomenology of Choice Sequences* (Synthese Library Vol. 335), Dordrecht: Springer.

Mark van Atten
CNRS, FRE 3593 (CNRS/Paris 4) – SND – Sciences, Normes, Décision, F-75005 Paris, France
mark.van_atten@paris-sorbonne.fr