FILOSOFISKA NOTISER

Årgång 1, Nr 1, December 2014

Lennart Åqvist
Future Contingents and Determinism in Aristotle's *De Interpretatione* IX: Some Logical Aspects of the So-called Second Oldest Interpretation

Daniel Rönnedal
Diodorus Cronus Mästerargument: Några Reflektioner

Daniel Rönnedal
Tidslogik som Multimodal Logik

Karl Pettersson
Informational Models in Deontic Logic: A Comment on "Ifs and Oughts" by Kolodny and MacFarlane

ISSN: 2002-0198

Hemsida: www.filosofiskanotiser.com

Future Contingents and Determinism in Aristotle's *De Interpretatione* IX: Some Logical Aspects of the So-called Second Oldest Interpretation*

Lennart Åqvist

Abstract
Dealing with the famous Chapter IX of Aristotle's *De Interpretatione*, the paper proposes a formal reconstruction of the so-called Second-Oldest Interpretation, which (i) is based on the indeterminist logic **DARB** of historical necessity [Åqvist & Hoepelman (1981)] and which (ii) is inspired by the seminal work done by the scholars van Eck (1988) and von Kutschera (1986). It must be emphasized that the point of view from which *De Int.*IX is studied here is not so much that of a strict philologist engaged in Aristotelian scholarship as rather that of a modern philosophical logician concerned about systematic combinations of tense and modality. However, both points of view are of course respectable and justified in the case of *De Int.*IX, and, in the opinion of the present author, there ought to be more cross-fertilization between them.

1. Introduction

The main purpose of the present paper is to give an analysis / interpretation of the famous Chapter IX of Aristotle's *De Interpretatione*, which is unorthodox in the following two respects: (i) it is based on a Prior-style tense logic supplemented with characteristic operators for the notions of *historical* necessity ["inevitability"] and possibility, where this logic is a fragment of the indeterminist "tree" system **DARB** originally presented in Åqvist & Hoepelman (1981); and (ii) it tries to reconstruct and represent, within that system, a version of the so-called **Second-Oldest Interpretation** of *De Int.*IX, which is due to the Dutch scholar van Eck (1988) – see the References *infra.*

As to the first unorthodox feature of our approach, we observe that there is considerable agreement among writers on the logic of historical necessity that the *semantics* of that notion should be based on *tree-structures* representing 'branching' time[1] with the same past and open to the future. As Burgess (1978, p.159) nicely puts it:

> If the determinist sees Time as a line, the indeterminist sees it as a system of forking paths...

There is less agreement, however, on the question how the temporal dimension is to be reflected *syntactically* in the formal language of the logic of historical necessity under consideration. There is then a choice between essentially two courses: (*a*) to follow Prior (1967, Appendix A) in using, in addition to the modalities N and M for historical necessity and possibility, special *temporal operators* such as his F, G, P and H as well as the Scott / von Wright operators for the *next* and the *last* moment in discrete time; and (*b*) to follow Rescher & Urquhart (1971, Ch.XVII), van Eck (1981, 1988), and von Wright (1984) in using those historical modalities as *explicitly indexed by temporal names*, in the style of, say

N_tA for "it is historically necessary at time t that A", and
M_tA for "it is historically possible at time t that A"; together with the more general notation:
p_t for "p-at-time t".

In this paper we follow von Kutschera (1986) in adopting course (*a*), mainly because the kind of modal-temporal logic to which it gives rise seems to be better developed, and easier to handle for our present purposes, than its rival according to course (*b*). At least, this appears to be so in today's research situation.[2]

As to the second unorthodox feature of our approach, we must point out, first of all, that we use the Kretzmann (1987) labels for the historical interpretations at issue. On the so-called **Oldest Interpretation** of *De Int.*IX, Aristotle claims that the Principle of Universal Bivalence ["all statements – including statements about particular future events – are true or false"] implies a Deterministic Conclusion to the effect that every true statement

[1] The locution "branching time" is perhaps not entirely unobjectionable: see e.g. Rescher & Urquhart (1971, Ch.VII, sect. 2, p. 72 f.). In spite of this being so, we continue to use the received terminology in this paper.

[2] The situation may now have improved somewhat, due to my recent results in Åqvist (2004). But the present paper is not the right place to report on those results, let alone to apply them to problems of ancient modal logic.

holds by necessity, or, equivalently, that every statement is either necessarily true or necessarily false; then [in 19a7-22] he argues that there are true statements about particular future events which are contingent in the sense of admitting "the possibility of being and of not being", where, then, "both possibilities are open, both being and not being, and, consequently, both coming to be and not coming to be". Thus, Aristotle explicitly abandons the Deterministic Conclusion and will consequently have to give up the Law of Universal Bivalence, restricting its application to statements about past events, present events, and such future events as are naturally necessitated – eclipses, for instances [see Kretzmann (1987, sect.(i)), when commenting on Lukasiewicz]. This is the distinctive feature of the Oldest Interpretation of Aristotle's *De Int.*IX.

Again, on the so-called **Second-Oldest Interpretation**, Aristotle is concerned about *preserving* Universal Bivalence and about reconciling it with *in*determinism (particularly with respect to the future), which means that he gives up, not only the Deterministic Conclusion ["all true statements hold by necessity"] just spoken of above, but also, most importantly, the thesis that Universal Bivalence *implies* this Deterministic Conclusion.

In his defence of the Second-Oldest Interpretation van Eck (1988, p.19) points out that Boethius, in his two commentaries on *De Interpretatione* IX, shows himself a representative of the Second-Oldest Interpretation: his main thesis is that, according to Aristotle, it is necessary for a future contingency proposition and its negation that one is true and the other false, but not *definitely* true, nor *definitely* false.[3] In the context van Eck refers to Kretzmann (1987) as having stressed the influence which this point of view of Boethius has had on the subsequent discussion [see in particular Kretzmann (1987, "Conclusion")].

van Eck also points out that in modern times most commentators reject the Second-Oldest Interpretation on the ground (partly) that the crucial phrase "definitely true" is rather obscure and its Greek analogue [*ἀληθὲς ἀφωρισμένως*] does not occur in *De Int.* IX at all.[4] In order to counter this

[3] We may observe here that the French translator and commentator J. Tricot, when dealing with the difficult sentence 19a39-19b2 in the concluding passage of *De Int.* IX, adds to his translation of that sentence in a footnote: "sous-entendu *ἀφωρισμένως determinate*" (i.e. "tacitly understood: definitely, determinately"). See Tricot (1994, p.103, n.3) as well as our comments on 19a39-19b4 at the end of Section 9 *infra*.

[4] Interestingly, Kretzmann (1987, sect.(iii), "Sources of the second-oldest interpretation") observes that in the *Categories* ch.10, 12b38-40 and 13a2-3, Aristotle uses the adverbial modifier *ἀφωρισμένως* in a way which appears to provide a warrant for Boethius' emendation.

objection, then, van Eck (1988, p.20) suggests that instead we take the phrase "definitely true" in Boethius as an equivalent of the "already true" [*ἤδη ἀληθῆ*] in19a38. Such a somewhat special concept of truth can then be naturally connected with a temporally dependent notion of necessity, viz. that of historical necessity.

Without taking a definite stand on the hard issue concerning the historical accuracy of the two interpretations of Aristotle just mentioned (an issue involving *inter alia* a large number of difficult strictly philological questions), I now want to state two main reasons for my being seriously interested in the Second-Oldest Interpretation as reconstructed within the system **DARB** of Åqvist & Hoepelman (1981). The first main reason derives from Dana Scott in a discussion of the use of three-valued logic in connection with so-called 'improper definite descriptions':

> ...I have yet to see a really workable three-valued logic. I know it can be defined, and at least four times a year someone comes up with the idea anew, but it has *not* really been developed to the point where one could say it is pleasant to work with. Maybe the day will come, but I have yet to be convinced.
> So my advice is to continue with two-valued logic because it is easy to understand and easy to use in applications; then when someone has made the other logic workable a switch should be reasonably painless.
> Scott (1970, p.153)

So *a* reason (not necessarily decisive) for preferring the Second-Oldest Interpretation to its Oldest rival then comes down to the following well-known one: it has the virtue of enabling us stay – along with Aristotle – within two-valued logic, whereas the Oldest Interpretation compels us – along with him – to go into three-valued logic (many-valued logic? intuitionism?). Again, the second main reason for my interest in the Second-Oldest Interpretation is bound up with my choice of logico-analytical framework, the indeterminist "tree" system **DARB**: it turns out that the central notion in van Eck's reconstruction – the "already true" [*ἤδη ἀληθῆ*] in 19a38 – can be explicated and rigorously defined in our framework against the background of the technical result on **DARB**, which is stated and proved in Section 2 *infra*; furthermore, on the basis of that very same result, we are also able to provide an explanation within **DARB** of Aristotle's difficult argument for Determinism, on which he spends so much time in *De Int.*IX (see Sections 2-3 and 10 *infra*).

Suppose then that we accept, provisionally at least, the Second-Oldest Interpretation. What does it amount to? and what problems do we then face? We recall that both interpretations agree on taking Aristotle to reject what I called the Deterministic Conclusion ["all true statements hold by necessity", "every statement is either necessarily true or necessarily false"], but that the Second-Oldest one differs from its Oldest rival in two respects: (i) in taking Aristotle to reject the thesis that the Law of Bivalence implies the Deterministic Conclusion, and (ii) in taking him to accept the Law of Bivalence since, by (i), there is no longer any reason for him to give it up. Clearly, then, on the Second-Oldest Interpretation we face two interesting problems that are respectively bound up with the features (i) and (ii):

***Ad* (i)**: Explain why Aristotle spends so much time in developing an argument [in 18a34-19a6] for the thesis that Universal Bivalence *implies* the Deterministic Conclusion in spite of the fact that in the end he rejects that argument; and explain the import of the argument itself!

***Ad* (ii)**: Although Aristotle is now taken to accept Universal Bivalence in *one* sense of that Law, there are passages [e.g. 19a32-39 and 19a39-19b2] suggesting that he may still want to reject it in *another* sense of that Law: hence, explain those different senses with a view to telling us how this can be so!

In answer to the first problem here, we suggest that on the Second-Oldest Interpretation one should take Aristotle to be engaged in a dispute with an imaginary opponent, "the determinist", whose views and arguments he tries to present as forcefully and convincingly as possible, thus playing the role of an *advocatus diaboli*, as it were. Moreover, as to the import of the determinist argument itself, we suggest that it is based on an *operator shift fallacy* from

FNp ["it will be the case that necessarily (i.e. *then* in the future) *p*"] to

NFp ["necessarily (i.e. as of *now*), it will be the case that *p*"]

which in turn suggests a distinction between a weak and a strong future tense, viz. one between the sentence-forms

Fp [weak future tense] and *NFp* [strong future tense].

This distinction is already implicit in the Prior (1967, Ch.VII) distinction between the Ockhamist and the Peircean future operators "will"; in Section 10 below we notice that the same distinction is used by van Rijen (1986, 1989). As appears from Section 11 *infra*, however, we strongly feel that our operator-shift-fallacy diagnosis should be supplemented by the von

Kutschera (1986) analysis of the Aristotelian arguments for determinism – an analysis based on the interesting distinction between "Aussage *über* Gegenwärtiges / Vergangenes" and "Ausage in Gegenwarts- / Vergangenheits*form*".

Again, in answer to the second of the above problems, we refer the reader to Section 9 *infra*, where we emphasize a distinction between the Principle of Bivalence *tout court* (i.e. Bivalence as ordinarily understood) and a Principle of **Strong** Bivalence, which asserts that every statement is either *already* true or *already* false, i.e. that every statement is either true or false *in the way it holds for the past and the present.* As we explicate that strong principle, it captures a sense of Bivalence in which Aristotle would certainly reject it; recall what he says about future contingents like the Sea Battle one at the very end of 19a32-39: *οὐ μέντοι ἤδη ἀληθῆ ἢ ψευδη.*

In very broad outline the plan of the present paper is as follows. We devote Sections 2-7 to certain logical and analytical preliminaries to a commentary on *De Int.*IX, whereas the analysis or commentary itself – carried out using **DARB** (or better, an extended fragment of **DARB**) – is to be found in the remaining Sections 8-12. As to the contents of all these sections more in detail, see the table at the very beginning of this paper.

2. A result in the logic of historical necessity

In our analysis of some Aristotelian views and arguments we shall use a *Prior-style tense logic with historical necessity,* the syntax of which contains the following special, characteristic locutions:

MA	for	*it is historically possible that A*
NA	for	*it is historically necessary that A*
FA	for	*it will at some time in the future be the case that A*
eA	for	*it will be the case tomorrow that A*
GA	for	*it will always be the case that A*
PA	for	*it was at some time in the past the case that A*
wA	for	*it was the case yesterday that A*
HA	for	*it was always the case that A*

In addition to these locutions our formal language contains an at most denumerable set Prop of *propositional variables* as well as the familiar *Boolean sentential connectives* $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ and $\leftrightarrow$ for, respectively, negation, conjunction, disjunction, material implication and material equivalence. The set of (formal) *sentences*, or (well-formed) *formulas*, is then built up in the usual way.

Again, our present logic of historical necessity, i.e. the logic of the above indicated temporal notions, will essentially be a fragment of the system **DARB**, which was first presented and studied in Åqvist & Hoepelman (1981) from a semantic as well as an axiomatic point of view. We must note, however, that the notation used here is typographically simpler and more in conformity with current styles of tense logic than the one adopted in Åqvist & Hoepelman (1981); thus, for our crucial tense-logical operators we now use straightforward letters *M, N, F, e, G, P, w* and *H* instead of diamonds, squares and circles with various inscriptions (including the 'empty' inscription). Furthermore, we note that the expressive resources of our **DARB**-fragment largely coincide with those employed by von Kutschera (1986) in his analyses of Aristotle's argument for determinism in *De Int.* IX and of Diodorus' so called "Master Argument" – a main difference between our formalisms lies in the fact that von Kutschera (1986) uses the Kamp (1971) operator "Jetzt" (*now*), where in the **DARB**-fragment we use the operators "Tomorrow" (*e*) and "Yesterday" (*w*).

As to the detailed description of the model-theoretical "tree"-semantics for **DARB**, we must refer the reader to Åqvist & Hoepelman (1981). We recall here that already the title of Åqvist & Hoepelman (1981) indicates that **DARB** is a system of combined *modal* (and deontic) *tense* logic, the semantics of which is based on certain set-theoretical structures known as *trees* (in the word "**DARB**", "**ARB**" suggests the Latin *arbor*, meaning "tree"). See also von Kutschera (1986, p.216, n.6), who speaks of *Baumuniversen* in a similar context. Furthermore, my later papers Åqvist (1996, Section 14) and Åqvist (1999) are helpful as far as the closer understanding of this style of semantics for historical modalities is concerned.

Now, an important axiom of **DARB**, which reappears in our present fragment, is the following:

A28. $A \rightarrow NA$, provided that A is a propositional variable.[5]

[5] As to the semantical justification of the axiom **A28**, its validity is due to a condition on so-called *valuations*, referred to in Åqvist & Hoepelman (1981, p.198) as (C), in Åqvist (1996, p.96) as (III), and in Åqvist (1999, pp.352-353) as (ix) or, equivalently, as (C4 $\approx$). See also von Kutschera (1986a, sect.3, p.265).

In Åqvist & Hoepelman (1981) we were able to generalize this axiom in an interesting way, which gives us the following result in our present logic of historical necessity (or fragment of **DARB**):

THEOREM. By saying that a formal sentence is *non-future* we mean that it contains no occurrences of the operators F, e or G. Then, any instance of the schema

S. $A \rightarrow NA$

is provable (and valid) in our logic of historical necessity, *provided that* A is non-future.

Proof. By induction on the length of A.

Basis. $A = p$, for some propositional variable p. Clearly, p is non-future in the required sense of containing no occurrences of F, e or G. The desired result is then immediate by virtue of axiom A28.

Induction step. The cases where the main, or principal, operator of A is any of the Boolean connectives $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ or $\leftrightarrow$ (with their arguments being non-future) are easy and left to the reader. Consider next:

Cases $A = MB$ and $A = NB$, where B is non-future. By virtue of the well known S5-principles

$MB \rightarrow NMB$ and $NB \rightarrow NNB$

which are valid in our logic for the historical modalities M and N, we immediately obtain the desired result in these two cases without even having to appeal to the inductive hypothesis.

Again, consider:

Case $A = PB$, where B is non-future. We then argue as follows:

1. $B \rightarrow NB$ provable by the hypothesis of induction
2. $H(B \rightarrow NB)$ from 1 by a rule of proof in elementary tense logic
3. $PB \rightarrow PNB$ from 2 by a familiar thesis in tense logic
4. $PNB \rightarrow NPB$ axiom A30 in Åqvist & Hoepelman (1981)
5. $PB \rightarrow NPB$ 3, 4, transitivity of $\rightarrow$

where 5 is our desired result.

Case $A = wB$, where B is non-future. Then:

1. $B \rightarrow NB$	provable by the inductive hypothesis
2. $w(B \rightarrow NB)$	1, the tense logic of w
3. $wB \rightarrow wNB$	2, the tense logic of w
4. $wNB \rightarrow NwB$	axiom A31 in Åqvist & Hoepelman (1981)
5. $wB \rightarrow NwB$	3, 4, transitivity of $\rightarrow$

where 5 = Q.E.D.

Case $A = HB$, where B is non-future. The case is handled as follows:

1. $B \rightarrow NB$	provable by the inductive hypothesis
2. $H(B \rightarrow NB)$	1, the tense logic of H
3. $HB \rightarrow HNB$	2, the tense logic of H
4. $HNB \rightarrow NHB$	axiom A29 in Åqvist & Hoepelman (1981)
5. $HB \rightarrow NHB$	3, 4, transitivity of $\rightarrow$

where 5 = Q.E.D.

The induction is complete, and so is the proof of our Theorem.

3. Putative laws of commutation in the DARB-fragment

In the proof of the result on historical necessity just presented we met with three interesting **DARB-**valid principles telling us how the operator N commutes with the past tense operators P, w and H, viz., in the nomenclature of Åqvist & Hoepelman (1981):

A30. $PNB \rightarrow NPB$
A31. $wNB \rightarrow NwB$
A29. $HNB \rightarrow NHB$

A crucially important feature of our logic of historical necessity is now that the corresponding principles all fail to be valid for the future tense operators F, e and G. Thus, *none* of the "putative" laws of commutation

$$FNB \rightarrow NFB$$
$$eNB \rightarrow NeB$$
$$GNB \rightarrow NGB$$

are valid or provable in **DARB**. (The converses of the second and the third law, at least, are provable and valid in **DARB**, however.) These facts will be seen to be of considerable interest when we turn to a closer examination of Aristotle's reasoning in *De Interpretatione* IX. Again, we should observe here that **DARB** shares those features with some indeterminist tense logics discussed in the literature, e.g. the so-called ‘Actualist’ or ‘Ockhamist’ system **A** considered by Burgess (1978) as well as the so-called ‘T × W logic’ dealt with by von Kutschera (1997).

4. On the notions *already true* and *already false* within an extension of the DARB-fragment

In the present section we add to our Prior-style tense logic with historical necessity (= the fragment of **DARB** presented in Section 2 *supra*) certain fresh one-place operators that form sentences when applied to sentences, viz. *True, False, Pres-or-Past, AlreadyTrue* and *AlreadyFalse*. The intended reading of the characteristic locutions to which our new operators give rise is as follows (where *A* is any sentence of our **DARB**-fragment):

TrueA	for *it is true that A*
FalseA	for *it is false that A*
Pres-or-PastA	for *it is a present or past* possible fact *that A*
AlreadyTrueA	for *it is already true that A*
AlreadyFalseA	for *it is already false that A*

As to the interpretation in a technical sense of these new locutions, we adopt the following ‘definitional’ axiom schemata:

AxTrue. $TrueA \leftrightarrow A$
AxFalse. $FalseA \leftrightarrow \neg A$

AxPres-or-Past. *Pres-or-Past* iff (if and only if) *A* contains no occurrences of *F, e* or *G*; i.e., *A* is *non-future* in the sense of Section 2 above.

AxAlreadyTrue. $AlreadyTrueA \leftrightarrow (Pres\text{-}or\text{-}PastA \wedge TrueA)$
AxAlreadyFalse. $AlreadyFalseA \leftrightarrow (Pres\text{-}or\text{-}Past\neg A \wedge True\neg A)$ $[\leftrightarrow AlreadyTrue\neg A]$.

Caveat. We must observe here that only the first two and the last two equivalences are full-blown axiom schemata in the object-language, whereas the characterization offered by the third equivalence, AxPres-or-Past, cannot be formulated in the object-language but has to be relegated to the meta-language (of our extended **DARB**-fragment); this explains why we use “iff” instead of ↔ in that characterization. Another way of putting the matter is to say that, in the extended **DARB**-fragment, we treat *Pres-or-Past* as a primitive logical operator which, unlike the remaining four ones, is not explicitly definable in the object-language of that fragment.

On the basis of the interpretation just provided we obtain the following straightforward result:

Corollary. All instances of the following schemata are provable and valid in the extended **DARB**-fragment:

(i) $A \vee \neg A$, $N(A \vee \neg A)$ [Law of Excluded Middle, two versions]

(ii) $TrueA \vee FalseA$,
$N(TrueA \vee FalseA)$ [Principle of Bivalence, two versions]

(iii) $Pres\text{-}or\text{-}Past\neg A \leftrightarrow Pres\text{-}or\text{-}PastA$

and similarly for NA, MA, PA, wA and HA replacing $\neg A$ in the left member of (iii).

(iv) $Pres\text{-}or\text{-}Past(A \vee B) \leftrightarrow (Pres\text{-}or\text{-}PastA \wedge Pres\text{-}or\text{-}PastB)$

and similarly for $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$ and $(A \leftrightarrow B)$ replacing $(A \vee B)$ in the left member of (iv).

(v) $AlreadyTrueA \rightarrow NA$ $[\leftrightarrow NTrueA]$

(vi) $AlreadyFalseA \rightarrow N\neg A$ $[\leftrightarrow NFalseA \leftrightarrow \neg MA]$

On the other hand, in spite of the validity of (i) and (ii), the following schema fails in the extended **DARB**-fragment:

(vii) $AlreadyTrueA \vee AlreadyFalseA$.

Proof. Immediate by the meaning of the relevant notions. As to the principles (v) and (vi), their validity in the extended **DARB**-fragment readily follows from our Theorem in Section 2 – note that, due to the presence of *Pres-or-Past* as a new primitive in the object-language of this extended fragment, they simply amount to a re-formulation of that Theorem in this new object-language. As to the non-validity of schema (vii), just take A to be any sentence containing occurrences of the future-tense operators F, e or G, in which case both disjuncts in (vii) are seen to be false.[6]

[6] We ought to observe here that, although our characterization of the new primitive *Pres-or-Past* looks like a fairly uncomplicated syntactical one, that characterization in effect amounts to quite a powerful *truth condition* in the model-theoretic *semantics* for the extended **DARB**-fragment, which has far-reaching consequences as far as the *validity* of various schemata is concerned. In the present Corollary, this fact is nicely illustrated e.g. by the validity of schemata (v) and (vi) and the non-validity of (vii).

5. Different versions of determinism explicable in the extended DARB-fragment

In the present section we speak loosely of 'determinism' in the sense of a deterministic *claim* or *thesis*. We then make two distinctions with respect to determinism in this sense, viz. (*a*) between *strong* and *weak* deterministic theses, and (*b*) between what I call *plain* and *disjunctive* deterministic theses. Cross-classifying in the obvious way, we then arrive at four forms of determinism, which are made precise as follows:

Strong Plain Determinism. This thesis asserts that all instances of the schema

$TrueA \to NA$

are provable and valid in the extended **DARB-**fragment.

Weak Plain Determinism. This thesis only asserts that all instances of the weaker schema

$AlreadyTrueA \to NA$

are provable and valid in the extended **DARB-**fragment. Since that thesis is equivalent to

$Pres\text{-}or\text{-}PastA \to (TrueA \to NA)$

it might be viewed as a form of determinism about the present or past, but not necessarily about the future.

Strong Disjunctive Determinism. This is the thesis according to which all instances of the schema

$(TrueA \vee FalseA) \to (NA \vee N\neg A)$

are provable and valid in the extended **DARB-**fragment. A *prima facie* weaker version of the thesis amounts to the provability / validity of the schema

$N(TrueA \vee FalseA) \to (NA \vee N\neg A)$.

Weak Disjunctive Determinism. According to this view we only have that all instances of the definitely weaker schema

$(AlreadyTrueA \vee AlreadyFalseA) \to (NA \vee N\neg A)$

are provable and valid in the extended **DARB-**fragment. Again, this thesis is clearly a form of determinism about the present or the past, but not necessarily about the future; the schema defining it is equivalent to the schema

$$Pres\text{-}or\text{-}PastA \rightarrow ((TrueA \vee FalseA) \rightarrow (NA \vee N\neg A)).$$

Remarks

(I) The two disjunctive versions of determinism respectively follow from, and are in fact equivalent to, the plain ones.[7]

(II) The schemata defining the two strong versions are clearly invalid in the extended **DARB**-fragment, but we are free to consider the results of adding them to the latter, for sure. On the other hand, the schemata defining the two weak versions are indeed valid in the extended **DARB**-fragment.

(III) Strong Disjunctive Determinism, on both versions, asserts that for all sentences A, the Principle of Bivalence, on both versions, implies the conclusion $(NA \vee N\neg A)$. By **AxTrue** and **AxFalse** it may equivalently be taken to assert that the Law of Excluded Middle, on both versions, implies that conclusion.

6. What are we to mean by a 'future contingent'?

When dealing with such a difficult and controversial text as Aristotle's *De Interpretatione* IX, it is clearly quite important to get straight about the terminology used in commenting on it; the question raised in the title of this section then has to be answered in a reasonably precise way. Well, consider any sentence A of our logic of historical necessity [= the extended **DARB**-fragment as presented in Section 4 *supra*]. First of all, then, we say that

A is a *statement about some particular future event* iff
$A = FB$ or $A = eB$ or $A = GB$ for some sentence B such that
B is a propositional variable or a truth-functional compound
of propositional variables, which is interpreted as referring to
some particular event.

---

[7] They can indeed be seen also to entail, and thus to be equivalent to the plain versions. As this fact is perhaps not immediately obvious, let us quickly show how Strong Disjunctive Determinism entails Strong Plain Determinism in our extended **DARB**-fragment:

1. $(TrueA \vee FalseA) \rightarrow (NA \vee N\neg A)$, for all A	assumption (= Strong Disjunctive Determinism)
2. $(TrueA \rightarrow (NA \vee N\neg A)) \wedge (FalseA \rightarrow (NA \vee N\neg A))$	1, propositional logic
3. $TrueB \wedge \neg NB$, for some B	counterassumption, equivalent to the negation of Strong Plain Determinism
4. $N\neg B$	2 (setting A=B); then use 3 together with elementary **DARB**-laws
5. $\neg TrueB$	4, elementary **DARB**-laws, **AxTrue**

where 5 contradicts the first conjunct in 3. Hence, the counterassumption 3 is reduced *ad absurdum*. Q.E.D.

Hence, if A is a statement about some particular future event, A will begin with one of the future tense operators F, e or G, but the sentence governed by that operator will be non-future in our familiar sense of containing no occurrences of those three operators. Instead of the locution just defined we could as well speak here of statements about '*particulars that are going to be*', which phrase is used by Aristotle himself in the opening paragraph of *De Int.* IX [18a28-34]. Or, with Ackrill (1963, p.132), we might speak of '*future singulars*' in the very same sense.

Secondly, we can now say that

A is a ***contingent*** *statement about some particular future event*
or A is a ***future contingent****,* for short – iff
A is a statement about some particular future event, and,
according as A is of the form FB, eB, or GB, A satisfies the condition
$MFB \wedge M\neg FB$, or
$MeB \wedge M\neg eB$, or
$MGB \wedge M\neg GB$,
as the case may be.[8]

7. How does the existence of future contingents, if there are any, affect the validity of such laws as those of Bivalence and Excluded Middle?

In the present section we make an attempt to answer the question raised in its title. So consider any future contingent A, e.g. of the form FB, which, as we recall, then satisfies the condition

$$MFB \wedge M\neg FB$$

asserting that "the two future possibilities are both open", as it were. With respect to A, we argue as follows, with a view to providing counterexamples to the Principle of Bivalence (on both versions, the 'necessitated' as well as the 'unnecessitated' ones):

0.	$N(TrueFB \vee FalseFB)$	assumption, instance of 'necessitated' Bivalence
1.	$TrueFB \vee FalseFB$	from 0 by the logic of N (= an extension of **S5**)
2.	$TrueFB$	hypothesis (= first disjunct in 1)
3.	NFB	from 2 by Strong Plain Determinism
4.	$NFB \vee N\neg FB$	from 3 by disjunction introduction
5.	$FalseFB$	hypothesis (= second disjunct in 1)
6.	$N\neg FB$	from 5 by Strong Plain Determinism together

8 We note that our notion of a future contingent comes close to the one used by Ackrill (1963, p.139): 'future singulars in cases where both possibilities are open'.

	with **AxFalse** and **AxTrue**
7. $NFB \vee N\neg FB$	from 6 by disjunction introduction
8. $NFB \vee N\neg FB$	from the deductions 2-4 and 5-7 by disjunction elimination, discharging the two hypotheses 2 and 5
9. $N(TrueFB \vee FalseFB)$ $\rightarrow (NFB \vee N\neg FB)$	from the deduction 0-8 by the DeductionTheorem, discharging the initial assumption 0

On the other hand, we know that

10. $MFB \wedge M\neg FB$	since *FB* is a future contingent

But line 10 is equivalent to the negation of the consequent of line 9. Hence:

11. $\neg N(TrueFB \vee FalseFB)$ 9, 10, *modus tollens*

where the result 11 provides a counterexample to the 'necessitated' form of the Principle of Bivalence. In order to obtain the desired counterexample to the 'unnecessitated' form thereof, we just start from line 1 as our initial assumption and, after having arrived at line 8, we obtain instead of line 9:

9'. $(TrueFB \vee FalseFB)$ $\rightarrow (NFB \vee N\neg FB)$	from the deduction 1-8 by the Deduction Theorem, discharging the initial assumption 1

Hence:

11'. $\neg(TrueFB \vee FalseFB)$ 9', 10, *modus tollens*

and we are done.

Remarks

(i) Our argument is considerably simplified, if we use Strong *Disjunctive* Determinism in the place of the "plain" version. We then obtain line 8 directly from line 1 by Strong Disjunctive Determinism, and, since the remainder of the proof goes through unproblematically as above, we are done.

(ii) As the Laws of Excluded Middle and Bivalence are clearly equivalent[9] in the extended **DARB**-fragment, the above argument can easily

[9] On the issue whether the two laws are equivalent also for Aristotle, see e.g. von Kutschera (1986, p.216, n.9), and Hintikka (1973, p.148, n.2). I agree both with Hintikka's assertion: "Whatever the merits of the distinction are in the abstract, I cannot find it in Aristotle's text", and with that of von Kutschera: "Bei der normalen Deutung der Operatoren $\vee$ und $\neg$, ..., gilt jedoch das *tertium non datur* dann und nur dann, wenn das Prinzip der Bivalenz gilt. Der Unterschied ist

be re-written in a way so as to provide counterexamples to Excluded Middle as well. Again, this goes for both versions of that law.

(iii) We observe that the above argument also goes through for future contingents $A = eB$ and $A = GB$, as is easily verified.

It is now crucially important to realize that these counterexamples (to Bivalence/Excluded Middle) and their proofs rely heavily on the principle of **Strong** Plain/Disjunctive Determinism, to which we appealed in the arguments *supra.* If we reject those strong deterministic theses while accepting just the their **weak** versions (given in Section 5 above), those arguments fail, of course.

At best, we know from the Corollary in Section 4 *supra* that the schema

(vii) $AlreadyTrueA \vee AlreadyFalseA$

fails to be valid or provable in the extended **DARB**-fragment. More precisely, (vii) fails whenever A contains occurrences of the future-tense operators F, e, or G. Expressing this result in the object-language of our extended **DARB-** fragment, we obtain that the following
schema

(viii) $\neg Pres\text{-}or\text{-}PastA \to (\neg AlreadyTrueA \wedge \neg AlreadyFalseA)$

is provable and valid in that fragment by the definitions of the notions involved. So, in particular, then, we have for any future contingent FB /eB, GB/ that

(ix) $\neg(AlreadyTrueFB\ /eB, GB/ \vee AlreadyFalseFB\ /eB, GB/)$

is provable and valid in the present logic of historical necessity.

To summarize our findings in this section. Suppose that there are future contingents of any of the three forms considered in our definition of the notion. Then, (*i*) given Strong Plain Determinism or Strong Disjunctive

---

für das folgende jedoch unerheblich, da Aristoteles "nicht" und "oder" im normalen Sinn deutet." A difference (noteworthy, but of subordinate importance in our opinion) between von Kutschera and myself concerns the status of the Principle of Bivalence: von Kutschera (*op.cit.,loc.cit*) takes it to be, unlike the *tertium non datur*, a metalinguistic principle, whereas I take them both to be capable of being formulated in the object-language (see Section 4 above: Corollary, schemata (i)-(ii)).

Determinism, the existence of future contingents certainly affords counterexamples to the laws of Bivalence and Excluded Middle, as shown by the proof of lines 11 and 11' *supra* (or of its *eB*- and *GB*-cognates). This holds regardless of whether we deal with the necessitated or unnecessitated versions of these laws. On the other hand, (*ii*) rejecting these strong forms of determinism in favour of the weak ones considered in Section 5, the existence of future contingents does not provide any counterexamples to those laws any longer. Moreover, (*iii*) these laws and weak forms of determinism are all provable and valid in our extended **DARB**-fragment. Finally, (*iv*) according to this logic of historical necessity there *are* true future contingents in the precise sense of there being sets of sentences

$$\{FB,\ MFB \wedge M\neg FB\},\quad \{eB,\ MeB \wedge M\neg eB\},\quad \{GB,\ MGB \wedge M\neg GB\}$$

with B a propositional variable or a truth-functional compound of propositional variables referring to some particular event, which sets are *consistent* and *satisfiable* in the extended **DARB**-fragment**.** In fact, this is an obvious and important feature of that logic of ours.

8. Structure of *De Int.* IX: a four-fold division and a preliminary account

Here, we suggest dividing Chapter IX of *De Interpretatione* into four main parts.[10]

Part I consists of 18a28-34, Part II of 18a34-19a6, Part III of 19a7-22 and Part IV consists of 19a23-19b4. This division differs from those of Ackrill (1963) and van Eck (1988) just in the following respect: we make a separate Part III of 19a7-22, while Ackrill takes his Part III to start with 19a7 and to continue down to the very end 19b4; van Eck, on the other hand, squeezes 19a7-22 into his Part II which then encompasses 18a34-19a22. So I agree with Ackrill on the extension of Parts I and II, and with van Eck that 19a23-19b4 should be taken to form a separate part (*his* Part III, *my* Part IV).

Let me now, without getting entangled in too many controversial details, briefly state what I take to be the main content of each part in my suggested division. In Part I [18a28-34] Aristotle asserts that the necessitated version of

[10] In the present paper I mainly use Ackrill's translation in Ackrill (1963). I will indicate in footnotes where I deviate from it. My deviations are mostly due to van Eck (1988), who prefers variants closer to the Greek text which often result in more distorted English but, on the other hand, in a better understanding as well. The Greek text I use is that of the edition by L. Minio-Paluello (1949).

the Principle of Bivalence holds for statements about "what is and what has been", but that it does not hold in the same way [*οὐχ ὁμοίως*] for statements about "particulars that are going to be". Next, in Part II [18a34-19a6] Aristotle develops an argument that purports to show that if every affirmation or negation is true or false, then "nothing either is or is happening, or will be or will not be, by chance or as chance has it, but everything of necessity and not as chance has it...". Elsewhere in Part II, Aristotle formulates this '*deterministic*' conclusion using such locutions as "everything that happens happens of necessity", "everything that will be happens necessarily", and the like. Again, in Part III [19a7-22] Aristotle rejects the deterministic conclusion, claiming that "not everything is or happens of necessity", because "what will be has an origin both in deliberation and in action" so that, sometimes, "there is the possibility of being and of not being". Finally, in Part IV [19a23-19b4], Aristotle states his own view about the notion of necessity in relation to statements about particular future events (such as the famous sea-battle tomorrow), whereupon, in a concluding paragraph beginning with 19a39, he closes Chapter IX by connecting his findings in Part IV with the opening Part I.

9. The gist of the van Eck (1988) version of the Second-Oldest Interpretation represented in the extended DARB-fragment

The best way of approaching van Eck's interpretation of *De Int.* IX from our standpoint is, I suggest, to turn to the original Aristotelian text itself, just as van Eck himself does, and check his comments on it. We may then usefully start with Parts I and IV in our suggested division.

The chapter, i.e. *De Int.* IX, opens as follows:

> With regard to what is and what has been it is necessary for the affirmation or the negation to be true or false. And with universals taken universally it is always the case[11] that one is true and the other false, and with particulars too, as we have said; but with universals not spoken of universally it is not necessary. But with particulars that are going to be not in the same way [*οὐχ ὁμοίως*].
>
> Part I [18a28-34]

[11] *ἀεὶ*; Ackrill and van Eck: "it is always necessary...". There is no *ἀνάγκη* in the Greek text at this spot, however, although there is certainly one in the preceding sentence.

***Ad* 18a28-34.** Here we read that with regard to the present and the past it is necessary (*a*) that the affirmation or the negation is true or false; and that with universal and particular sentences it is always the case (*b*) that one is true and the other false. Now, van Eck (1988, p.34) points out that it is most significant how the denial of this is phrased in the concluding sentence. Aristotle *does not say*, for example, that for future contingencies this *does not hold*, or, this *is not necessary* (as he in fact says with regard to "universals not spoken of universally"). No, he says:

> "But with particulars that are going to be *not in the same way*".
> [van Eck's italics].

van Eck then suggests that we read this concluding sentence as follows: for statements about particular future events, it is not in the same way necessary that (*a*), nor that (*b*); it is a denial not of the Principle of Bivalence *tout court,* but of that principle *in the way it holds for the past and the present.*

For short, let us call the principle thus conceived the Principle of **Strong** Bivalence. And it turns out that, on our representation of the van Eck (1988) interpretation, this principle amounts precisely to the schema (vii) met with in the Corollary in Section 4 above, viz.:

(vii) $AlreadyTrueA \vee AlreadyFalseA$ [Principle of **Strong** Bivalence]

which is known to fail of validity in the extended **DARB**-fragment (because it does not hold for any sentences containing occurrences of the future-tense operators *F, e,* or *G*). On the other hand, the Principle of Strong Bivalence is clearly valid for statements about the present or the past, viz., in the sense that the following schema

(x) $Pres\text{-}or\text{-}PastA \rightarrow (AlreadyTrueA \vee AlreadyFalseA)$

is provable and valid in our logic of historical necessity.

How does van Eck arrive at his way of making precise the words "not in the same way" [*οὐχ ὁμοίως*] in Part I? In order to understand this crucial feature of his interpretation we must skip Parts II and III for the time being, and go on directly to our Part IV [19a23-19b4] which reads as follows:

What is, necessarily is, when it is; and what is not, necessarily is not, when it is not. But not everything that is, necessarily is; and not everything that is not, necessarily is not. For to say that everything that is, is of necessity, when it is, is not the same as saying simply[12] [*ἁπλῶς*] that it is of necessity. Similarly with what is not.

[19a23-27]

And the same account holds for contradictories: everything necessarily is or is not, and *will* be or not[13]; but one cannot divide [*διελόντα*] and say that one or the other is necessary. I mean, for example: it is necessary for there to be or not to be a sea-battle tomorrow; but it is not necessary for a sea-battle to take place tomorrow, nor for one not to take place – though it is necessary for one to take place or not to take place.

[19a27-32]

So, since statements are true in the same way the states of affairs are[14], it is clear that wherever these are such as to allow of contraries as chance has it, the same necessarily holds for the contradictories also. This happens with things that are not always so or are not always not so. With these it is necessary for one or the other of the contradictories to be true or false – not, however, this or that[15], but as chance has it; or for one to be true *rather* than the other, yet not *already* [*ἤδη*] true or false.

[19a32-39]

Clearly, then, it is not necessary that of every affirmation and opposite negation one should be true and the other false. For the way it is with

[12] *ἁπλῶς*, Ackrill: “unconditionally”. We follow van Eck here in sticking to the more literal translation: “simply”.

[13] *καὶ ἔσεσθαί γε ἢ μή*, Ackrill: “and will be or will not be”. We follow van Eck here in using italics to render the emphasis that *γε* imparts to *ἔσεσθαί*.

[14] van Eck’s translation, slightly deviating from Ackrill’s.

[15] *τόδε ἢ τόδε*, Ackrill: “this one or that one (*sc.* of the contradictories)”. We follow van Eck in reading the phrase as referring to “true or false”, but the difference is probably of subordinate importance.

> the things that are, so it is not also with the things that are not, but may possibly be or not be; but as is said.[16]
>
> [19a39-19b4]

Let us now consider in turn the four passages *supra,* which make up Part IV in our suggested division of *De Int.* IX, with a view to capturing the gist of the van Eck (1988) interpretation as seen from the standpoint of our extended **DARB-**fragment.

***Ad* 19a23-27.** This passage is truly fascinating: Aristotle is saying that everything that is, necessarily is, when it is; but that this does not mean that it is simply [*ἁπλῶς*] necessary. Now, van Eck makes the following observation:

> 'Thus something is necessary under the condition that it is already the case, i.e. past or present. If so, it is historically necessary.
> So "if p then necessarily p" holds when p satisfies the condition, but not if it does not, if p is about the future.'
>
> [van Eck (1988, p.37 f.)]

Note that two important notions appear in this comment by van Eck, viz. that of something being *already* the case (or being *present or past*), and that of *historical* necessity. And he connects the two notions by suggesting that they satisfy what I called the principle of Weak Plain Determinism in Section 5 *supra*, viz.

$AlreadyTrueA \rightarrow NA$, or more explicitly:
$Pres\text{-}or\text{-}PastA \rightarrow (TrueA \rightarrow NA)$

In my opinion, the importance of van Eck's present suggestions can hardly be overrated. Again, as to Aristotle's second, unspecified notion of necessity, which also figures in 19a23-27 and is called by him 'simple' necessity (necessity *simpliciter* or necessity *tout court,* if you are a fan of Latin or French), let us denote it by the symbol $\Box$ and just observe for the time being that such schemata as

$A \rightarrow \Box A$
$\neg A \rightarrow \Box\neg A$

[16] We follow van Eck's translation here as being more literal, but admittedly less elegant than the one adopted by Ackrill.

are not to be accepted as valid according to Aristotle in the passage under consideration. We do not, however, exclude the possibility that the unspecified modality $\Box$ be identical to the modality N of historical necessity in our extended **DARB**-fragment. In that case, i.e. if $\Box = N$, the distinction emphasized by Aristotle here would be the straightforward one used in Section 5 above to distinguish Weak Plain Determinism from Strong Plain Determinism, viz. $AlreadyTrueA \rightarrow NA$ **vs.** $TrueA \rightarrow NA$ (or $A \rightarrow NA$) without any restriction on A.

***Ad* 19a27-32**. This passage contains the famous sea-battle-tomorrow example. So here Aristotle is saying that, according to the same account [*ὁ αὐτὸς λόγος*], everything necessarily is or is not, and *will* be or not, but also that one cannot divide (i.e. distribute the necessity over disjunction) and say that one or the other is necessary. And the sea-battle-tomorrow example tells us precisely how and why this is so. Again, van Eck comments on the passage as follows:

> 'It is the same logos because "necessarily(p or not-p)" may be read distributively "necessarily p or necessarily not-p" if p satisfies the above condition, i.e. is about the present or past – in that case the distributive and the non-distributive readings are equivalent -, but not if it is about the future.'
>
> [van Eck(1988, p.38)]

All this is perfectly sound and can be intelligibly expressed in our formal framework as follows. The schema

$N(A \vee \neg A)$

as well as its substitution instances involving future-tense operators

$N(FB \vee \neg FB)$

$N(eB \vee \neg eB)$

$N(GB \vee \neg GB)$

are all valid and provable in the extended **DARB**-fragment.

On the other hand, since the schema

$N(A \vee \neg A) \rightarrow (NA \vee N\neg A)$ [*cf.* Strong Disjunctive Determinism, Section 5 *supra*]

fails to be valid in that fragment due to the existence of future contingents, we are not entitled to infer from the above substitution instances such schemata as

$NFB \vee N\neg FB,$

$NeB \vee N\neg eB$, or

$NGB \vee N\neg GB$

all of which are clearly invalid in our logic of historical necessity. But, as observed by van Eck in his comment above, Disjunctive Determinism turns out to be acceptable if restricted to the present and the past; just note that the schema

$Pres\text{-}or\text{-}PastA \rightarrow (N(A \vee \neg A) \leftrightarrow (NA \vee N\neg A))$ [*cf.* Weak Disjunctive Determinism *supra*]

is valid and provable in our logic. Note also that this fact verifies van Eck's remark about the equivalence of distributive and non-distributive readings when p is about the present or past.

***Ad* 19a32-39.** This passage is of course extremely important from a philological point of view, because it is the only one in Chapter IX where Aristotle explicitly uses the word *already* [*ἤδη*] in connection with those for truth and falsehood. We recall that the main point in van Eck's defence of the Second-Oldest Interpretation of *De Int.* IX consists precisely in taking the phrase "definitely true" in Boethius as an equivalent of the "already true" in the present passage, where this notion of truth is naturally connected with a temporal notion of necessity, viz. that of historical necessity [van Eck (1988, p.20)].

What, then, is Aristotle's message in this passage? Briefly, it is that, with respect to statements about "things that are not always so or are not always not so" – including future contingents of the 'sea-battle-tomorrow' type just spoken of in 19a27-32 -, the Principle of Bivalence is valid, whereas the so-called Principle of **Strong** Bivalence, viz.

$AlreadyTrueA \vee AlreadyFalseA$

is not [*οὐ μέντοι ἤδη ἀληθῆ ἢ ψευδῆ*]; at best, the latter holds for statements about the present or the past – *cf.* schemata (vii) and (x) discussed earlier in this section. Also, Aristotle repeats his warning not to divide here: although, with respect to statements of the type at issue, it is necessary for one or the other of the contradictories to be true or false, he emphasizes: "not, however, this or that, but as chance has it" [*οὐ μέντοι τόδε ἢ τόδε ἀλλ ' ὁπότερ ' ἔτυχε*].

***Ad* 19a39-19b4.** According to the van Eck (1988) interpretation, what is denied by Aristotle in 19a39 ff. is precisely the Principle of Strong Bivalence, *not* the Principle of Bivalence as ordinarily understood.[17] He (van Eck) says:

[17] According to the Oldest Interpretation, it is precisely the Principle of Bivalence as ordinarily understood that is denied by Aristotle in the admittedly somewhat surprising sentence 19a39-

> 'And it is in this sense that we must interpret the conclusion that now immediately follows [19a39-19b2]. "Clearly, then, it is not necessary that of every affirmation and opposite negation one should be true and the other false;" It is the denial of the necessity that of every pair of contradictories one is definitely true and the other definitely false in the sense of already true and false respectively. That is to say, the historical necessity of "this one true and that one false" is denied, i.e. it is not necessary that this one is true and that one false *in the way it is necessary for accomplished facts*; "for the way it is (*hôsper*) with the things that are, so (*houtôs*) it is not also with the things that are not, but may possibly be or not be; but as is said." (19b2-4).'
>
> [van Eck (1988, p.33 f.), his italics]

Thus, in the context of 19a39-19b2, the van Eck interpretation instructs us to read "true" as "*already* true" and "false" as "*already* false". If this was Aristotle's meaning, it is a pity that he did not make it perfectly clear by again putting in *ἤδη* in front of *ἀληθῆ* and *ψευδῆ* in that context. But, anyway, we have now seen in what sense we must take the words "not in the same way" [*οὐχ ὁμοίως*] in Part I of the chapter.

So far, we have only considered Parts I and IV in our suggested division of the chapter together with the van Eck (1988) commentary on those parts. However, it turns out that this is enough to enable us to grasp the gist of his interpretation which, as we have seen, is readily and naturally representable in the extended **DARB-**fragment. Nevertheless, we still have to say something about the remaining Parts II and III.

19b2. True, the present passage as a whole indeed lends a good deal of *prima facie* support to this kind of interpretation. On the other hand, we may note here that van Rijen (1986, p.134; 1989, p.128) suggests the following translation of the surprising sentence 19a39-19b2:

> Consequently, it is obvious that it is not necessary that of every affirmation and negation it is a particular member of the contradictory pair that is the true one and the other that is the false one. [The underlining of "particular" is just in van Rijen (1986), not in van Rijen (1989).]

This translation differs from the one favoured by Ackrill and van Eck mainly in that it invites us more strongly to read *ἀνάγκη* *distributively* in the context [i.e., formally, as $N(\mathit{True}A \wedge \mathit{False}\neg A) \vee N(\mathit{True}\neg A \wedge \mathit{False}A)$, where the *False*-clauses are clearly redundant]. We should then also observe that the matching formulation in the opening passage 18a28-34 just had *ἀεὶ* ["always"], but no *ἀνάγκη* (see note 10 *supra*); this fact could be taken to suggest that Aristotle did not want to complicate his discussion of necessity with the distributive **vs.** non-distributive distinction already in the opening passage, but preferred to relegate that discussion to the end of the chapter.

10. On the argument for determinism in *De Int.* IX; a distinction between two future tenses

The least problematic section in the chapter is Part III [19a7-22] in our division, where Aristotle formulates his indeterminism with respect to the future and his belief in the existence of future contingents. And the most difficult one is the large Part II [18a34-19a6], where he seems to maintain a strong deterministic thesis according to which universal bivalence implies a deterministic conclusion of the form $NA \vee N\neg A$, which applies in particular to the future - and not only to the past and the present. Again, since in Part III he rejects that deterministic conclusion (but not the strong deterministic thesis or implication itself), Aristotle would then, by *modus tollens,* be forced to give up universal bivalence – this is known as the Oldest Interpretation. See also our discussion in Section 7 *supra.*

The most important of Aristotle's arguments for the deterministic thesis in the strong sense at issue is likely to be found in the following passage in Part II:

> Again, if it (*sc.*something) is white now it was true to say earlier that it would be white; so that it was always true to say of anything that has happened that it [was so, or][18] would be so. But if it was always true to say that it was so, or would be so, it could not not be so, or not be going to be so. But if something cannot not happen it is impossible for it not to happen; and if it is impossible for something not to happen it is necessary for it to happen. Everything that will be, therefore, happens necessarily. So nothing will come about as chance has it or by chance; for if by chance, not of necessity.
>
> [18b9-16]

Let us try to formalize this argument in the **DARB-**fragment. Consider a propositional variable *B,* which is then non-future in our sense of containing no occurrences of the operators *F, e* or *G*; where *B* represents the statement "it is white now", or else, refers to any particular event. The desired result, indicated in the next to last sentence in the quoted passage, is then:

Q.E.D. $FB \rightarrow NFB$

[18] The bracketed words are missing in the translations of Ackrill and van Eck. And the words ἔστιν ἤ are missing in the Minio-Paluello (1949) edition of *De Interpretatione.* According to Tricot (1994, p.97, n.5), those words were deleted already in the Waitz edition from 1844-1846. They remain, however, in the Cooke (1938) edition in the *Loeb Classical Library.*

where, for simplicity, we disregard the universal quantifier "everything" [ἅπαντα].

Here, then, is a possibly Aristotelian proof of Q.E.D.:

1. FB	truly said by one of Aristotle's speakers in 18a35 at any time earlier than the one to which "now" in 18b9 refers; assumption
2. FNB	from 1 by theorem-schema **S** in Section 2 (B being non-future) together with the elementary tense-logic for F in **DARB**
3. NFB	from 2 by the putative law of commutation $FNB \rightarrow NFB$ in Section 3
4. $FB \rightarrow NFB$	from the deduction 1-3 by the Deduction Theorem, discharging 1

where 4 = Q.E.D.

Remarks

(I) We must observe here that our formulation of the initial assumption FB involves a shift of speech point and speaker, as explained in the comment on line 1. We need this shift in order to have Aristotle's argument start with a *true* prediction FB supposedly made in the past by one of his speakers in 18a35. Note that the opening sentence in the passage gives a 'tricky' impression: it looks as if Aristotle starts the argument with an instance of the tense-logical law $B \rightarrow HFB$; how is that instance linked, and relevant, to the desired conclusion Q.E.D.? However, a careful reading of the text reveals that this might be a pseudo-problem, since it overlooks the role played by the important words "was true to *say earlier*" [ἀληθὲς ἦν εἰπεῖν πρότερον]. The presence of this inserted *saying*-at-any-*earlier*-time by a supposed speaker justifies us in avoiding the complications of the tense-logical law altogether, and in adopting instead an explanation in terms of a shift of speech point and speaker – Aristotle *now*, his supposed speaker *then* in the past. Nevertheless, his appeal to the tense-logical law certainly deserves further discussion; see Section 11 below, where we pay some attention to the interesting account of the Aristotelian deterministic arguments given by von Kutschera (1986).

(II) As we observed in Section 3 above, the putative law of commutation $FNB \rightarrow NFB$ is neither valid, nor provable in **DARB**. So the step from 2 to 3 in the reconstructed Aristotelian argument is faulty, or at least cannot be justified in our logic of historical necessity. Nor can, of course, the strongly deterministic implication Q.E.D. itself be justified in that logic.

(III) Nevertheless, the fact that $FNB \rightarrow NFB$ fails, whereas the principle

A30: $PNB \rightarrow NPB$ is valid in our logic is of considerable interest as follows: it shows that statements about the future, notably future contingents, differ from those about the present and the past also in other respects than those emphasized by van Eck *supra.* For they don't obey the same laws of commutation. The same remark obviously applies to such principles as

$eNB \rightarrow NeB$ **vs. A31:** $wNB \rightarrow NwB$, and

$GNB \rightarrow NGB$ **vs. A29:** $HNB \rightarrow NHB$

as we pointed out already in Section 3 above. Thus, with respect to these putative laws of commutation, we can still say with Aristotle: *οὐχ ὁμοίως* !

At this juncture we are happy to register an important distinction made by van Rijen (1986, p.122; 1989, p.116f.), which goes back to the Prior (1967, Ch.VII) distinction between the Ockhamist and the Peircean future operators "will". van Rijen observes that there are two kinds of future tense expressed in English by such phrases as "it will be the case that ...", viz. (i) a *weak* future tense in the sense of

> "in the course of future events as they will *actually* take place, it will be the case that ...",

and (ii) a *strong* future tense in the sense of

> "whatever may be the course of future events, it will be the case that...".

Clearly, the distinction here intended by van Rijen can be represented in our **DARB**-fragment as the one between the sentence-forms

(i) FB [weak future tense] and (ii) NFB [strong future tense].

He observes, for instance, that the strong future tense implies the weak one, but not *vice versa*. By paraphrase of this observation into **DARB**, he is then saying that the schema

$NFB \rightarrow FB$

is valid, whereas

$FB \rightarrow NFB$, i.e., our Aristotelian Q.E.D *supra*

fails to be valid; which assertions are perfectly correct on our view. As a matter of fact, in van Rijen (1986, p.130; 1989, p.124), he levels a criticism similar to ours against the deterministic argument (although the failure-of-commutativity aspect, on which I insist, seems to be missing), and takes the ambiguity of the future tense to generate the problems with which *De Int.* IX deals. I fully agree with him on this diagnosis.

11. On the von Kutschera (1986) account of the Aristotelian arguments for determinism

In his paper von Kutschera draws an important distinction between these notions:

(i) statement about the past [G. "Aussage über Vergangenes"], and

(ii) statement in past-tense form [G. "Aussage in Vergangenheitsform"]

and observes that the distinction may be concealed, or blurred, by our using ambiguously the word

(iii) past-time statement [G. "Vergangenheitsaussage"]

to cover both meanings (i) and (ii). A crucial principle, accepted both by Diodorus Cronus and Aristotle, could then be formulated as follows:

(I) Every true past-time statement is necessary
[G. "jede wahre Vergangenheitsaussage ist notwendig"].

von Kutschera then makes (I) formally precise by translating it as

(I') For each true past-time statement A it holds that $A \rightarrow NA$.

He then suggests rendering the argument for determinism that we discussed in the last section (Section 10) in the following ingenious way which, unlike ours, has the virtue of doing justice to Aristotle's explicit appeal to the tense-logical law $A \rightarrow HFA$:

(a)	A	hypothesis, assumed to be true
(b)	$A \rightarrow HFA$	valid already in weak tense-logics, like Lemmon's K_t

(c)	HFA	from (a), (b) by *modus ponens*
(d)	$NHFA$	from (c) by principle (I'), (c) being past-time
(e)	$HFA \rightarrow (A \vee FA)$	valid in *discrete-time* tense-logics, like **DARB**
(f)	$NHFA \rightarrow N(A \vee FA)$	from (e) by standard modal logic
(g)	$N(A \vee FA)$	from (d), (f) by *modus ponens*
(h)	$A \rightarrow N(A \vee FA)$	from the deduction (a)-(g) by the Deduction Theorem
(i)	$FA \rightarrow N(FA \vee FFA)$	substitution of FA for A in (h), which is provable / valid
(j)	$FFA \rightarrow FA$	valid in standard extensions of Lemmon's K_t
(k)	$FA \rightarrow NFA$	from (i), (j) using standard modal logic

Remark

von Kutschera (1986) points out that the step from (c) to (d) in the above argument is justified only if we interpret the locution *past-time statement* ("Vergangenheitsaussage") in principle (I') as *statement in past-tense form* ("Aussage in Vergangenheitsform", "Aussage im Präteritum"), but not, however, as *statement about the past* ("Aussage über Vergangenes"). He then points out that it is not the case that every statement in past-tense form [in the sense of beginning with a past tense operator like H, P or w] is a statement about the past. For instance, the statement (c), HFA, is certainly a statement in past-tense form since it begins with H, but from this it does not automatically follow that it is a statement *about* the past in the semantical sense that its truth-value only depends on what has happened in the past; the inserted future tense operator F in (c) may make all the difference in this respect.

von Kutschera (1986) refers to the argument just reconstructed as Aristotle's *second argument* for determinism. He also gives an analysis of Aristotle's *first argument* for determinism in the form of a commentary on 18a34-b9, which is interesting in that it utilizes similar ideas and distinctions as his analysis of 18b9-16 (just discussed). Here, I shall quickly paraphrase von Kutschera's account of the argument in 18a34-b9 as follows:

We must carefully distinguish between these notions:

(i) statement about the present [G. "Aussage über Gegenwärtiges"], and

(ii) statement in present-tense form [G. "Aussage in Gegenwartsform"]

and again we should observe that the distinction may be concealed, or blurred, by our using ambiguously the locution

(iii) present-time statement [G. "Gegenwartsasussage"]
to cover both meanings (i) and (ii). A principle analogous to (I) would then be:

(II) Every true present-time statement is necessary.

which could be formally translated as

(II') For each present-time statement *TrueA* it holds that $TrueA \rightarrow NA$.

Consider then an argument formulated in our extended **DARB**-fragment:

(a)	$TrueA \vee True\neg A$,	for all statements A assumption [Law of Universal Bivalence]
(b)	$TrueFA \vee True\neg FA$	by substitution of FA for A in (a), which is valid *ex hypothesi*
(c)	$TrueFA \rightarrow NFA$	by (II'), since *TrueFA* is present-time
(d)	$True\neg FA \rightarrow N\neg FA$	by (II'), since $True\neg FA$ is present-time
(e)	$NFA \vee N\neg FA$	from (b), (c), (d) by propositional logic
(f)	$(FA \rightarrow NFA)$ $\wedge (\neg FA \rightarrow N\neg FA)$	from (e) by modal logic, using $A \rightarrow MA$ and re-writing (e) twice as an implication

Remark

With respect to such an argument, von Kutschera observes that the principle (II') is acceptable only if we interpret the locution *present-time statement* ("Gegenwartsaussage") in it as *statement in present-tense form* ("Aussage in Gegenwartsform", "Aussage im Präsens"), though not as *statement about the present* ("Aussage über Gegenwärtiges"). He then points out that statements in present-tense form [in the sense of beginning with a locution in the present tense, like *True*, "it *is* true (to say) that"] are not always statements about the present. This means e.g. that the instances (c) and (d) of (II'), in spite of their being in present-tense form, do not have to be statements *about* the present in the semantical sense that their truth-value only depends on what presently happens, i.e. independently of future developments of the world. But in the present example this is precisely not the case – the inserted future tense operators F in (c) and $\neg F$ in (d) again make all the difference in the relevant respects.

To sum up quickly: the von Kutschera (1986) analysis of the Aristotelian arguments for determinism strikes me as being quite illuminating and ingenious indeed, and I think my own account in the foregoing section certainly needs to be supplemented by this analysis.

12. The Ackrill (1963) arguments against the Second-Oldest Interpretation

According to Ackrill's version of the Second-Oldest Interpretation[19] [Ackrill (1963, pp.139-140)], Aristotle holds that with some future singulars, viz. those where both possibilities are open, though it is necessary that either p is true or not-p is true, it is neither necessary that p is true nor necessary that not-p is true. On this interpretation of *De Int.* IX, Ackrill also says, future singulars in cases where both possibilities are open *are* neither necessary nor impossible, but they will become necessary or impossible in due course, at the latest when the predicted event occurs or fails to occur.

Remark. Let us quickly observe here that these formulations in Ackrill (1963) agree almost exactly with our explanations given above of the concepts of (i) future contingents, (ii) the necessitated version of the Principle of Bivalence, and (iii) the [negation of the] Deterministic Conclusion to the effect that $NA \vee N\neg A$ ["every statement is either necessarily true or necessarily false"]. Furthermore, his last assertion seems to suggest such **DARB-**valid principles as

$FB \rightarrow FNB$ and $\neg FB \rightarrow G\neg MB$ (where B is non-future).

Now, Ackrill admits that the just stated view has some plausibility as an interpretation of the chapter, and that much of what Aristotle says in its last part [*sc.*19a7-19b4] lends colour to the suggested interpretation.[20] But, Ackrill continues:

[19] As emphasized in the Introduction *supra*, we suggest that, on the Second-Oldest Interpretation, one should take Aristotle to be engaged in a dispute with an imaginary opponent, "the determinist", whose theses and arguments he attempts to present as compellingly and convincingly as possible, thus playing the role of an *advocatus diaboli*. See our discussion of Ackrill's second objection to the Second-Oldest Interpretation in Section 12 *infra.*

[20] In view of our criticism *infra* of Ackrill's second objection to the Second-Oldest Interpretation, we take this judgment to be an understatement of the most colourful kind.

1st Objection.

> ‘On the other hand: (*a*) on this account Aristotle does not end by establishing the denial with which (it was argued above) he starts. He starts by denying that every affirmation and every negation has a truth-value, but he ends by asserting this, though denying that every affirmation and negation has a necessity-value.’

Remark. Well, it appears from our discussion of 18a28-34 in Section 9 *supra* that it is not at all clear that Aristotle is really *denying in the strict sense* that every affirmation and [matching] negation has a truth-value, i.e. is true or false. For, if van Eck (1988, p.34) is right in his comments on that initial passage - as I think he is -, Aristotle does not deny the Principle of Bivalence *tout court*, but only the Principle of **Strong** Bivalence.[21] Again, remember his crucial locution: *οὐχ ὁμοίως*! If so, the present objection to the Second-Oldest Interpretation can be disposed of.

Ackrill’s next objection [still Ackrill (1963) pp.139-140] is more intriguing and challenging:

2nd Objection.

> ‘(*b*) So far from defeating the determinist’s plausible argument from a statement’s being true to an event’s being necessary, the solution suggested says nothing whatsoever to meet it. The determinist in Part II [*sc.*18a34-19a6] does not argue from ‘necessarily *p* or necessarily not-*p*’. He argues *to* this strong thesis, and hence to determinism, from the weak thesis ‘necessarily: either *p* is true or not-*p* is true’, claiming

---

[21] We observe here that this distinction of van Eck’s opens up the possibility of a new reading of the initial passage 18a28-34, which complies better with the condition on adequate interpretations advocated by Ackrill in his present objection: in the opening sentence, read “true” as “*already* true” and “false” as “*already* false” (just as we suggested in Section 9 for the case of 19a39-19b2)! An immediate consequence of such a reading is that Aristotle will end Chapter IX by establishing the denial with which he starts: he starts by denying that, necessarily, every affirmation and matching negation is already true or already false (*sc.* counterexamples being afforded by ‘particulars that are going to be’ – see the concluding sentence in 18a28-34) and he ends by *still* denying this in 19a39-19b2 (and still having in mind the same counterexamples). In other words, he both starts and ends by denying - correctly, on our view - the validity of the Principle of Strong Bivalence, i.e. the validity of schema (vii) and its equivalent necessitated version. Regardless of the problem as to whether this “new” reading of 18a28-34 is defensible or not, it certainly provides an elegant escape from Ackrill’s present objection. Furthermore, as far as the traditional issues about the Principle of Bivalence (or Excluded Middle) as ordinarily understood are concerned, they simply fail to arise on the new reading.

> that if p is true the p-event cannot fail to occur. On the first (*sc.* Second-Oldest) interpretation Aristotle's answer does not meet the determinist's argument; it simply denies an implication he claims to prove.'

Remark. The gist of this objection appears to be the following. On the Second-Oldest Interpretation, Aristotle denies determinism, i.e. the deterministic *implication*, both in the sense of Strong Plain Determinism and in that of Strong Disjunctive Determinism according to the explications given in Section 5 *supra*. However, he says nothing whatsoever to meet the determinist's *argument* for those implications. In particular, for instance, with respect to the deterministic *implication* $FB \rightarrow NFB$ (see Section 10 above), Aristotle does not tell us what is wrong about the *argument* from *FB* [weak future tense] to *NFB* [strong future tense], on which he spends so much time in Part II. This is contrary to what one would expect him to do on the Second-Oldest Interpretation. So the objection comes down to this: if that account were correct, Aristotle would have told us what is wrong about the argument from *FB* to *NFB*; but he has not done so; therefore, the Second-Oldest Interpretation is incorrect.

However striking and ingenious this objection might appear, I take it to be fundamentally mistaken in that it overlooks a subtle but important point in modern mathematical logic, having to do with the nowadays current distinction between model-theoretical semantics and proof theory. In short, one uses **semantics** to establish the **non-validity** of arguments and sentences (by providing counterexamples, or countermodels, to them), and one may use **proof theory** to establish the **validity** of arguments and sentences (by means of deductions and proofs in a **sound**[22] deductive system). The Second-Oldest Interpretation could now take Aristotle to have argued as follows against the background of his discussion in Part IV [19a23-19b4]:

'Admittedly, for all future contingents *FB* (I have reminded you of their existence in Part III), such principles as

$TrueFB \rightarrow NFB$ and

$N(FB \vee \neg FB) \rightarrow (NFB \vee N\neg FB)$

[22] To say that a deductive system is **sound** (relative to an associated semantics) means (i) that any sentence *deducible* in the system *from* a given set of sentences is also a *semantic* (or 'logical') *consequence of* that set of sentences, and (ii) that any sentence *provable* in the system is also *valid* in it. Note that provability can be equated to deducibility from the *empty* set of sentences, and validity to being a semantic consequence of the *empty* set of sentences.

fail to be valid since their antecedents may be, or are, true without their consequents being so. (The modern logician may add: the concepts of validity and truth here appealed to are *semantical* notions in the sense of current so-called model theory.) Therefore, in any *sound,* or correct, *proof theory* for the logic of historical necessity which is here at issue, **every** alleged proof to the effect that the conclusion *NFB* always follows from the premiss *FB* [that (*NFB* ∨ *N*¬*FB*) always follows from *N*(*FB* ∨ ¬*FB*)] is bound to be fallacious and to contain some error – in some way or other. Knowing this to be the case by virtue of the existence of future contingents, I don't have to worry about which precise error is committed by the determinist in his putative proof of those false and invalid principles, a proof which I have tried to present in such a way as to make it look as plausible and convincing as possible – I am satisfied with having shown that it must contain *some* error or other.'

On our view, this potentially Aristotelian assistance to the Second-Oldest Interpretation is on the whole quite successful. To sum up our criticism of Ackrill's second objection: Aristotle *does* meet the determinist's argument[23] - in a somewhat roundabout, but still devastating way; hence, we are not entitled to claim with Ackrill that Aristotle, on the Second-Oldest Interpretation, says nothing whatsoever to meet that argument, or to use this alleged fact as an argument against the Second-Oldest Interpretation.

3rd Objection. In his third and last objection to the Second-Oldest Interpretation [Ackrill (1963, p.140)] Ackrill discusses the suggestion that the opening thesis about future singulars in Part I [18a28-34] is ambiguous between a non-distributive and a distributive reading of "necessary". He then argues that this suggestion is not helpful in enabling us to cope with the difficulties pointed out in his two preceding objections (called (*a*) and (*b*) above), because (i) the opening thesis is not ambiguous, and (ii) the development of the deterministic argument in Part II [18a34-19a6] does not exploit the strong (and false) version of the thesis.

---

23 van Eck (1988, p.36) certainly agrees with me on this point: he claims that, in the passage 19a32-39, Aristotle meets the deterministic argument, and hits its core, when observing in that passage that every statement is true or false, but not *already* true or false. However, van Eck's reason for this claim is probably not quite the same as mine, due to the fact that our logics of historical necessity differ from each other in the way explained in the Introduction *supra* (see the discussion of the so-called first unorthodox feature of our approach in this paper).

Remark. We may well grant Ackrill the points (i) and (ii) without thereby agreeing with him that they in any way threaten the Second-Oldest Interpretation. This should by now be obvious in view of (I) our initial formulation of the Second-Oldest Interpretation given in the Introduction *supra* and (II) the criticisms just levelled against his two objections (*a*) and (*b*).

References

As this paper is intended to be largely independent of the huge amount of literature to which *De Int.*IX has given rise, I have tried to cut down its List of References to a minimum, being guided by its purpose and its contents as stated in the Introduction *supra.* This means that most items in the following list are explicitly mentioned and referred to somewhere in the current text or in the list of Notes. Nevertheless, there are reasons for deviating from this principle of selection: thus, for instance, as far as the contributions *infra* by Harada, Kienzle, Thomason and Weidemann are concerned, I include them in the present bibliography on account both of (i) their intrinsic importance and of (ii) their importance for the closer study of *De Int.* IX from various points of view that have been neglected in this paper.

Ackrill, J. L. (1963). Aristotle's *Categories* and *De Interpretatione* , translated with notes by J. L. Ackrill. Oxford: Clarendon / Oxford University Press.

Åqvist, L. & Hoepelman, J. (1981). Some Theorems About a "Tree" System of Deontic Tense Logic. In R.Hilpinen (ed.), *New Studies in Deontic Logic.* Dordrecht: Reidel, pp. 187-221.

Åqvist, L. (1996). Discrete Tense Logic with Infinitary Inference Rules and Systematic Frame Constants: A Hilbert-Style Axiomatization. *Journal of Philosophical Logic* 25, pp. 45-100.

Åqvist, L. (1999). The Logic of Historical Necessity as Founded on Two-Dimensional Modal Tense Logic. *Journal of Philosophical Logic* 28, pp. 329-369. Missing references provided in *Journal of Philosophical Logic* 29 (2000), pp. 541-542.

Åqvist, L. (2004). On the R_t Approach to Temporal Logic with Historical Necessity and Conditional Obligation. Forthcoming.

Aristotle. *De Interpretatione.* Greek text: see Minio-Paluello (1949), Cooke (1938). Translations into English: see Ackrill (1963), Cooke (1938). Translation into German: see Weidemann (1994). Translation into French: see Tricot (1994).

Burgess, J. P. (1978). The Unreal Future. *Theoria* 44, pp. 157-179. German translation in Kienzle (1994), pp. 210-235.

Cooke, H. P. (1938). Aristotle's *The Categories* and *On Interpretation*, edited and translated by Harold P. Cooke. In *Loeb Classical Library* No.325. Cambridge, Mass.: Harvard University Press. 1st ed. 1938, last ed. 1996.

van Eck, J. A. (1981). *A System of Temporally Relative Modal and Deontic Predicate Logic and its Philosophical Applications.* Dissertation, Groningen. Also published in *Logique et Analyse* 25 (1982), pp. 249-290 and 339-381.

van Eck, J. A. (1988). Another Interpretation of Aristotle's De Interpretatione IX: A support for the so-called second oldest or 'mediaeval' interpretation. *Vivarium* XXVI, 1, 19-38. This commentary also contains translations into English of various important passages in *De Int.* IX.

Harada, K. (1994). Indeterministische Zeitlogik. In Kienzle, pp. 236-373.

Hintikka, J. (1973). *Time and Necessity: Studies in Aristotle's Theory of Modality.* Oxford: Clarendon / Oxford University Press.

Kamp, H. (1971). Formal Properties of 'Now'. *Theoria* 37, pp. 227-273.

Kienzle, B. (1994). *Zustand und Ereignis.* Eingeleitet, übersetzt und herausgegeben von Bertram Kienzle. Frankfurt: Suhrkamp.

Kretzmann, N. (1987). Boethius and the truth about tomorrow's sea battle. In L. M. de Rijk and H.AG. Braakhuis (eds.), *Logos and Pragma. Essays on the Philosophy of Language in Honour of Professor Gabriel Nuchelmans*. Nijmegen, pp. 63-97. Also in Sorabji *et al.*(1998), pp. 24-52.

von Kutschera, F. (1986). Zwei Modallogische Argumente für den Determinismus: Aristoteles und Diodor. *Erkenntnis* 24, pp. 203-217.

von Kutschera, F. (1986a). Bewirken. *Erkenntnis* 24 (1986), pp. 253-281.

von Kutschera, F. (1997). T × W Completeness. *Journal of Philosophical Logic* 26, pp. 241-250.

Minio-Paluello, L. (1949). *Aristotelis Categoriae et Liber de Interpretatione.* Edition in the Oxford Classical Texts Series, Oxford.

Prior, A. N. (1967). *Past, Present and Future.* Oxford: Clarendon.

Rescher, N. and Urquhart, A. (1971). *Temporal Logic*. Wien/New York: Springer.

van Rijen, J.B.M. (1986). *Aristotle's Logic of Necessity.* Dissertation, Leiden. Extended version published under the title *Aspects of Aristotle's Logic of Modalities* as Volume 35 in Synthese Historical Library. Dordrecht / Boston / London: Kluwer, 1989.

Scott, Dana (1970). Advice on Modal Logic. In K. Lambert (ed.), *Philosophical Problems in Logic*. Dordrecht: Reidel, pp. 143-173.

Sorabji, R. *et al.* (1998). *Ammonius: On Aristotle On Interpretation 9*, translated by David Blank, with *Boethius: On Aristotle On Interpretation 9, first and second commentaries*, translated by Norman Kretzmann,with essays by Richard Sorabji, Norman Kretzmann & Mario Mignucci. London: Duckworth.

Thomason, R. H. (1970). Indeterminist Time and Truth-Value Gaps. *Theoria* 36, 264-281. German translation in Kienzle (1994), pp. 190-209.

Tricot, J. (1994). *Aristote: ORGANON (I. Catégories - II. De l'Interprétation).* Traduction nouvelle et notes par J. Tricot. Paris: Librairie Philosophique J. VRIN.

Weidemann, H. (1994). *Aristoteles*: *PERI HERMENEIAS.* Übersetzt und erlaütert von Hermann Weidemann. Berlin: Akademie-Verlag.

Weidemann, H. (1997). Ein drittes modallogisches Argument für den Determinismus: Alexander von Aphrodisias. In W. Lenzen (Hrsg.), *Das weite Spektrum der analytischen Philosophie. Festschriftt für Franz von Kutschera.* Berlin / New York: W. de Gruyter, pp. 429-446.

von Wright, G. H. (1984). "Omne quod est quando est necesse est esse". In the author's *Truth, Knowledge, and Modality. Philosophical Papers*, *vol. III*. Oxford / New York: Basil Blackwell, pp.72-85.

Note

* This paper has been published previously in Logique & Analyse 181 (2003), pp. 13-48. It is reprinted with permission of the author and the publisher.

Department of Law
Uppsala University
P.O.Box 512
S-751 20 Uppsala
SWEDEN
E-mail: Lennart.Aqvist@jur.uu.se

Diodorus Cronus Mästerargument: Några Reflektioner

Daniel Rönnedal

Abstrakt

Det sägs att den gamla grekiska tänkaren Diodorus Cronus argumenterade för uppfattningen att någonting är möjligt endast om det *är* eller *kommer att vara* sant. Hans argument går under benämningen ”Mästerargumentet”. I den här uppsatsen tittar jag närmare på detta. Jag tar upp två möjliga tolkningar och går igenom några argument för utgångspunkterna. Jag visar hur det är möjligt att acceptera alla premisser i argumentet, givet att de tolkas på ett visst sätt, samtidigt som man förkastar slutsatsen. Det här innebär positiva nyheter för alla som tycker att det ligger någonting i Diodorus Cronus resonemang men samtidigt tror att det finns möjligheter som aldrig realiseras.

1. Introduktion

Ett känt filosofiskt argumenten från antiken är Diodorus Cronus[24] (ca 300 f.Kr.) Mästerargument. Många tänkare har diskuterat detta och det råder delade meningar om hur det bör tolkas och vad det har för filosofisk relevans. Jag kommer i den här uppsatsen att presentera två möjliga läsningar. Eftersom det inte finns några skrifter bevarade av Diodorus Cronus är det omöjligt att med någon säkerhet svara på om dessa är historiskt korrekta eller inte. Men oavsett om de är historiskt korrekt eller inte, så är de resonemang vi skall diskutera intressanta i sig. När jag i fortsättningen talar om *Diodorus Cronus* Mästerargument är det i regel någon av dessa rekonstruktioner jag avser.[25]

---

[24] För mer information om Diodorus Cronus, se Bobzien (2004) och Sedley (2009).

[25] För mer information om Mästerargumentet, se t.ex. Butler (1967), Denyer (1981), (2009), Fitting & Mendelsohn (1998), ss. 38-40, Gaskin (1995), (1998), Guerry (1967), Gundersen (1997), Hintikka (1964), Jarmużek & Pietruszczak (2009), McKirahan (1979), Michael (1976), Needham (1995), ss. 34-35, Prior (1955), (1967), kapitel 3, särskilt s. 32, Remes (1977), Rescher (1966), Rescher & Urquhart (1971), kapitel XVII, Sedley (2009), Vuillemin (1996), Weidemann (2008), White (1980), (1980b), (1984), Voytko (1997), von Kutschera (1986).

Filosofiska Notiser, Årgång 1, Nr. 1, December 2014, 41-57

Syftet med argumentet, enligt den allmänt rådande tolkningen, är att visa att någonting är möjligt endast om det *är* eller *kommer att vara* sant, eller, med andra ord, att allt som varken *är* eller *kommer att vara* sant är omöjligt. Är argumentet hållbart, finns det alltså inga möjligheter som inte realiseras.

Jag skall visa hur man kan acceptera alla premisser i argumentet samtidigt som man förnekar slutsatsen, givet att premisserna tolkas på ett visst sätt. Det här innebär positiva nyheter för alla som tycker att det ligger någonting i Diodorus Cronus resonemang men samtidigt tror att det finns möjligheter som aldrig realiseras.

Mästerargumentet har ofta betraktats som ett led i försöket att reducera de modala begreppen *nödvändig*, *möjlig*, *omöjlig* osv. till temporala begrepp. Enligt de andrahandskällor som finns bevarade menade Diodorus att något är möjligt om och endast om (omm) det är eller någon gång kommer att vara sant, något är nödvändigt omm det är sant och aldrig kommer att vara falskt, något är omöjligt omm det är falskt och aldrig kommer att vara sant, och något är icke-nödvändigt omm det antingen är eller kommer att vara falskt.[26]

Om man först kan visa att något är möjligt omm det faktiskt är fallet eller det kommer att vara fallet någon gång i framtiden, så följer de andra sambanden givet de vanliga relationerna mellan de modala begreppen, nämligen att det är nödvändigt att A omm det inte är möjligt att inte-A, att det är omöjligt att A omm det inte är möjligt att A osv. Det förefaller vara uppenbart sant att om något är eller kommer att vara fallet så är det möjligt. Däremot tycks det omvända inte vara lika säkert. Det är alltså det Mästerargumentet försöker visa enligt gängse tolkningar.

Den bästa källan vi har till Diodorus Cronus Mästerargument är Epiktetus (55 – 135 e.Kr.) Dissertationer[27], bok II, del 19. Enligt Epiktetus tycks Diodorus ha utgått ifrån att följande mängd av påståenden är inkonsistent:

D1. Allt (som är) förflutet och sant är nödvändigt.

D2. Det omöjliga följer inte från det möjliga.

D3. Något som varken är eller kommer att vara är möjligt.

Eftersom Diodorus insåg detta och menade att de två första satserna var plausibla, drog han slutsatsen att ingenting är möjligt som varken *är* eller *kommer att vara* sant.

Diodorus förefaller alltså ha betraktat {D1, D2, D3} som en apori, en mängd påståenden som var för sig förefaller vara rimliga, men som tillsammans medför en motsägelse. $\neg(D1 \wedge D2 \wedge D3)$ är giltig. För att

---

[26] Se t.ex. McKirahan (1979).

[27] Denna avhandling nedtecknades troligtvis av en elev till Epiktetus.

undvika denna motsägelse måste vi förkasta åtminstone en av satserna i aporin. D1 och D2 medför ¬D3; D2 och D3 medför ¬D1; D1 och D3 medför ¬D2. Epiktetus noterar att det finns tänkare som förkastar D1 och andra som förkastar D2 (efterföljare till Cleanthes och Panthoides, Antipater och Chrysippus). Diodorus förkastar D3. Enligt negationen av D3 är allt som varken *är* eller *kommer att vara* sant omöjligt, eller med andra ord: något är möjligt endast om det *är* eller *kommer att vara* sant. D1 och D2 kan därmed ses som premisser i ett argument för den slutsats Diodorus vill visa.

Det är dock inte uppenbart exakt hur Diodorus tänker sig att man kan härleda en motsägelse ur {D1, D2, D3}, eller hur man kan visa att D1 och D2 medför negationen av D3. I våra två rekonstruktioner kommer vi att lägga till några implicita premisser.

Jag kommer att använda följande symboler i den här uppsatsen. Övriga tecken tolkas på vanligt vis.

FA: Det kommer någon gång (i framtiden) vara fallet att A.

PA: Det har någon gång (i det förflutna) varit fallet att A.

GA: Det kommer alltid (i framtiden) vara fallet att A.

HA: Det har alltid (i det förflutna) varit fallet att A.

□A: Det är nödvändigt att A.

◇A: Det är möjligt att A.

⟨F⟩A: Det är eller kommer någon gång (i framtiden) vara fallet att A.

⟨P⟩A: Det är eller har någon gång (i det förflutna) varit fallet att A.

[G]A: Det är och kommer alltid (i framtiden) vara fallet att A.

[H]A: Det är och har alltid (i det förflutna) varit fallet att A.

Med hjälp av dessa symboler kan D1, D2, D3 och ¬D3 symboliseras på följande sätt.

FD1. $PA \rightarrow \Box PA$. Allt (som är) förflutet och sant är nödvändigt (D1).

FD2. $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\Diamond B \rightarrow \neg\Diamond A)$. Det omöjliga följer inte från det möjliga (D2).

FD3. $\neg A \wedge \neg FA \wedge \Diamond A$, för något A. Något som varken är eller kommer att vara är möjligt (D3).

¬FD3. $(\neg A \wedge \neg FA) \rightarrow \neg\Diamond A$, för alla A. Allt som varken är eller kommer att vara är omöjligt (¬D3).

2. Mästerargumentet, tolkning 1 (MT1) (Prior)

Vi skall nu undersöka vår första tolkning eller rekonstruktion av Mästerargumentet. ”SL” betyder att steget följer med vanlig satslogik.

1. $\neg A \wedge \neg FA$	[Antagande]
2. $(\neg A \wedge \neg FA) \rightarrow P\neg FA$	[Implicit premiss (P1)]
3. $P\neg FA$	[1, 2, SL]
4. $P\neg FA \rightarrow \Box P\neg FA$	[(FD1), $\neg FA/A$]
5. $\Box P\neg FA$	[3, 4, SL]
6. $\Box(A \rightarrow \neg P\neg FA) \rightarrow$	
$(\neg\Diamond\neg P\neg FA \rightarrow \neg\Diamond A)$	[(FD2), $\neg P\neg FA/B$]
7. $\Box(A \rightarrow \neg P\neg FA)$	[Implicit premiss (P2)]
8. $\neg\Diamond\neg P\neg FA \rightarrow \neg\Diamond A$	[6, 7, SL]
9. $\Box P\neg FA \rightarrow \neg\Diamond A$	[8, Grundläggande premiss (GP)]
10. $\neg\Diamond A$	[5, 9, SL]
11. $(\neg A \wedge \neg FA) \rightarrow \neg\Diamond A$	[1-10, hypotetisk härledning]

11 är ekvivalent med $\Diamond A \rightarrow (A \vee FA)$. Den här rekonstruktionen, som vi skall kalla för ”MT1”, är inte ny. Den bygger på Priors tolkning av Diodorus argument i t.ex. Prior (1955) och Prior (1967), och har diskuterats eller omnämnts i en eller annan version av många olika filosofer, t.ex. Fitting & Mendelsohn (1998), Gundersen (1997), Jarmużek & Pietruszczak (2009), McKirahan (1979), Needham (1996) och White (1984). MT1 är giltigt, slutsatsen följer med nödvändighet ur premisserna. Vill man förneka slutsatsen, måste man alltså förkasta någon av premisserna. Vi skall nu se att det tycks finnas goda skäl att acceptera alla argumentets utgångspunkter.

2.1. Argument för premisserna i MT1

I de följande argumenten för de olika premisserna kommer vi att förutsätta olika grundläggande antaganden som man i regel gör inom modallogiken och tidslogiken. För nödvändig bakgrundskunskap, se t.ex. Prior (1967), Priest (2008) och Rönnedal (2012b).

2.1.1. Argument för (P1)

Enligt (P1), $(\neg A \wedge \neg FA) \rightarrow P\neg FA$, så gäller det att om A inte är sann och aldrig kommer att vara sann, så har det någon gång i det förflutna varit fallet att A aldrig kommer att vara sann. Om vi antar att tiden är diskret och inte har någon början (för varje tidpunkt, t_1, gäller det att det finns en tidpunkt, t_2, som inträffar (precis) före t_1) och är jämförbar (för varje par av distinkta tidpunkter, t_1 och t_2, gäller det att t_1 inträffar före t_2, eller att t_2 inträffar före t_1), så kan vi visa att (P1) är giltig.

Följande semantiska resonemang bevisar detta. Antag att (1) $(\neg A \wedge \neg FA) \to P\neg FA$ är falsk vid en tidpunkt t_0. Då gäller det att (2) $\neg A \wedge \neg FA$ är sann i t_0, och att (3) $P\neg FA$ är falsk i t_0 [Från 1, SL]. (4) A är falsk i t_0, och (5) FA är falsk i t_0 [Från 2, SL]. Alltså, (6) $G\neg A$ är sann i t_0 [Från 5], och (7) $H\neg\neg FA$ är sann i t_0 [Från 3]. Antag att (8) t_1 inträffar före t_0, där t_1 är den tidpunkt som inträffar omedelbart före t_0. Då gäller det att (9) $\neg\neg FA$, är sann i t_1 [Från 7, 8]. Alltså, (10) FA är sann i t_1 [Från 9, SL]. Det följer att (11) det finns en tidpunkt t_2 som inträffar senare än t_1, och att (12) A är sann i t_2 [Från 10]. Eftersom t_1 är den tidpunkt som inträffar omedelbart före t_0 [8], tiden är diskret och jämförbar, och t_2 inträffar senare än t_1 [11], så är t_2 identisk med t_0 (13) eller också inträffar t_0 före t_2 (14). Antag att (15) t_2 är identisk med t_0. Då gäller det att (16) A är sann i t_0 [12, 15]. Alltså är A både sann och falsk i t_0 (17) [Från 4, 16, SL]. Antag att (18) t_0 inträffar före t_2. Då gäller det att (19) A är falsk i t_2 [Från 6, 18]. Alltså är A både sann och falsk i t_2 (20) [12, 19, SL]. Oavsett om vi antar att t_2 är identisk med t_0 eller att t_0 inträffar före t_2, så kan vi alltså härleda en motsägelse. Det följer att vårt ursprungliga antagande inte kan vara korrekt. Alltså är $(\neg A \wedge \neg FA) \to P\neg FA$ giltig.[28]

2.1.2. Argument för (FD1)

Enligt (FD1), $PA \to \Box PA$, så gäller det att om A har varit fallet, så är det nödvändigt att A har varit fallet. Om vi antar att A är atomär så kan vi visa att (FD1) är giltig i alla temporala aletiskt-deontiska system som innehåller tablåreglerna T-SP (shared past) och T-FT (forward transfer) (och T-BT (backward transfer)) (se Rönnedal (2012)). Det är precis dessa regler vi bör anta om det förflutna (och nuet) är nödvändigt. Följande semantiska tablå bevisar att (FD1) är giltig då A är atomär.[29]

[28] Det här argumentet förutsätter att tiden är jämförbar, diskret och saknar början. Jarmużek och Pietruszczak (2009) har visat att $(\neg A \wedge \neg FA) \to P\neg FA$ kan vara giltig även på vissa ramar där tiden inte har dessa egenskaper om den uppfyller vissa andra villkor. Men vi tycks t.ex. fortfarande vara tvungna att anta att det inte finns några (isolerade) irreflexiva tidpunkter som inte har en omedelbar föregångare. I avsnitt 2.2 nedan kritiseras MT1.

[29] Det kan vara värt att notera att t.ex. Aristoteles, som levde ungefär samtidigt med Diodorus, tycks ha accepterat D1, även om det är ganska svårt att avgöra vad han egentligen har för uppfattning på detta område. I Retoriken III, 17, 1418a3-5, säger han t.ex. att det inte finns någon kontingens i det som nu redan har skett. I Om Tolkning, IX, 19a23-25 kan vi läsa: ”Vad som är, är nödvändigtvis, när det är; och vad som inte är, är nödvändigtvis inte, när det inte är”. Och i Den Nikomachiska Etiken VI, 2, 1139b7-9, säger han följande: ”Det som är föremål för handlingsbeslutet är inte heller något passerat; ingen besluter ju sådant som att ha förstört Troja, emedan ingen överlägger om det förgångna, utan om sådant som ligger i framtiden och är möjligt, medan det som skett inte kan göras ogjort. Därför hade också Agathon rätt då han sade:

Bevis av $Pp \rightarrow \Box Pp$.

(1) $\neg(Pp \rightarrow \Box Pp)$, w_0t_0
(2) Pp, w_0t_0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg\Box Pp$, w_0t_0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $\Diamond\neg Pp$, w_0t_0 [3, $\neg\Box$]
(5) $t_1<t_0$ [2, P]
(6) p, w_0t_1 [2, P]
(7) $rw_0w_1t_0$ [4, $\Diamond$]
(8) $\neg Pp$, w_1t_0 [4, $\Diamond$]
(9) $H\neg p$, w_1t_0 [8, $\neg$P]
(10) $\neg p$, w_1t_1 [5, 9, H]
(11) $rw_0w_1t_1$ [5, 7, T-SP]
(12) p, w_1t_1 [6, 11, T-FT]
(13) * [10, 12]

2.1.3. Argument för (FD2)

Enligt (FD2), $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\Diamond B \rightarrow \neg\Diamond A)$, så gäller det att om det är nödvändigt att A implicerar B och det är omöjligt att B, så är det omöjligt att A. (FD2) är ett teorem i alla s.k. normala modala system. Och satsen är giltig på klassen av alla ramar. Följande semantiska tablå bevisar detta.[30]

Bevis av $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\Diamond B \rightarrow \neg\Diamond A)$.

(1) $\neg(\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\Diamond B \rightarrow \neg\Diamond A))$, 0
(2) $\Box(A \rightarrow B)$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg(\neg\Diamond B \rightarrow \neg\Diamond A)$, 0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $\neg\Diamond B$, 0 [3, $\neg\rightarrow$]
(5) $\neg\neg\Diamond A$, 0 [3, $\neg\rightarrow$]
(6) $\Box\neg B$, 0 [4, $\neg\Diamond$]
(7) $\Diamond A$, 0 [5, $\neg\neg$]
(8) 0r1 [7, $\Diamond$]
(9) A, 1 [7, $\Diamond$]
(10) $A \rightarrow B$, 1 [2, 8, $\Box$]
(11) $\neg B$, 1 [6, 8, $\Box$]
(12) B, 1 [9, 10, MP]
(13) * [11, 12]

’Ty en sak blott Gud berövats: att ogjort göra vad en gång gjorts’.” Notera också att jag använder något andra symboler i den här uppsatsen. Se Åqvist (2003) för mer information om detta.

[30] Aristoteles tycks även acceptera D2. I Om Himlen (Om Himlarna), bok I, del 12, säger han t.ex. ”… om B inte kan vara närvarande utan A, så bevisar A’s omöjlighet B’s omöjlighet”.

2.1.4. Argument för (P2)

(P2), $\Box(A \rightarrow \neg P\neg FA)$, kan bevisas i alla temporala aletiskt-deontiska system som beskrivs i Rönnedal (2012) och $A \rightarrow \neg P\neg FA$ är ett teorem i alla normala tidslogiska system. $A \rightarrow \neg P\neg FA$ är ekvivalent med $A \rightarrow HFA$, som säger att om något är fallet, så har det alltid varit fallet att det kommer att vara fallet. (P2) säger att denna sats är nödvändig.[31]

Bevis av $\Box(A \rightarrow \neg P\neg FA)$.

$$
\begin{gathered}
(1)\ \neg\Box(A \rightarrow \neg P\neg FA),\ w_0t_0 \\
(2)\ \Diamond\neg(A \rightarrow \neg P\neg FA),\ w_0t_0\ [1, \neg\Box] \\
(3)\ rw_0w_1t_0\ [2, \Diamond] \\
(4)\ \neg(A \rightarrow \neg P\neg FA),\ w_1t_0\ [2, \Diamond] \\
(5)\ A,\ w_1t_0\ [4, \neg\rightarrow] \\
(6)\ \neg\neg P\neg FA,\ w_1t_0\ [4, \neg\rightarrow] \\
(7)\ P\neg FA,\ w_1t_0\ [6, \neg\neg] \\
(8)\ t_1<t_0\ [7, P] \\
(9)\ \neg FA,\ w_1t_1\ [7, P] \\
(10)\ G\neg A,\ w_1t_1\ [9, \neg F] \\
(11)\ \neg A,\ w_1t_0\ [8, 10, G] \\
(12)\ *\ [5, 11]
\end{gathered}
$$

2.1.5. Argument för (GP)

I steg 9 av MT1 har vi använt antagandet att $\neg\Diamond\neg A$ är ekvivalent med $\Box A$. Denna ekvivalens är giltig i så gott som alla modallogiska system, och förefaller vara en intuitivt mycket rimlig premiss. Vi skall också anta att (GP) innehåller andra grundläggande antaganden av denna typ, bl.a. följande samband: $\langle P\rangle\neg A \leftrightarrow \neg[H]A$, och $\Box\neg A \leftrightarrow \neg\Diamond A$, vilka vi använder i vår andra rekonstruktion av Mästerargumentet (se avsnitt 3 nedan).

[31] Det kan vara värt att notera att Aristoteles i Om Tolkning, IX, nämner en princip som påminner om (P2). Där säger han: ”… om ett ting är vitt nu, så var det sant förut att säga att det skulle vara vitt”. Det är emellertid oklart om Aristoteles själv accepterar denna princip, eftersom han använder den i ett argument som han är kritisk till. Det är inte omöjligt att Diodorus kan ha använt implicita premisser i Mästerargumentet liknande (P2). Även om detta inte skulle vara fallet, så tycks (P2) vara en plausibel princip. Notera också att $A \rightarrow HFA$ inte säger samma sak som $A \rightarrow H\Box FA$, som inte tycks vara sann för alla A. $A \rightarrow H\Box FA$ säger att om A är fallet så har det alltid varit *nödvändigt* att A kommer att vara fallet.

2.2. Kritik av MT1

MT1 är giltigt och vi har nu också sett att det finns goda skäl att tro att premisserna är sanna. Alltså tycks vi ha goda skäl att tro på slutsatsen. Men slutsatsen är intuitivt inte särskilt rimlig, eftersom den är negationen av D3, som förefaller vara berättigad. Det tycks finnas möjligheter som aldrig realiseras. Antag att MT1 är hållbart. Då är en pärla på botten av havet som ingen observerar eller någonsin kommer att observera inte observerbar, dvs. då är det inte möjligt att observera en pärla på botten av havet om ingen faktiskt observerar den eller kommer att observera den i framtiden. Då är det inte möjligt att dela upp ett tygstycke i två delar om ingen faktiskt delar upp det eller någonsin kommer att dela upp det. Och det är inte möjligt för dig att läsa en bok av Epiktetus om du inte faktiskt läser denna bok eller kommer att läsa den. Allt detta är kontraintuitivt.

Vidare kan vi se att $(\neg A \wedge \neg FA) \rightarrow \neg\Diamond A$ inte är giltig i något (rimligt) aletiskt-deontiskt system av det slag som beskrivs i Rönnedal (2012), även om vi antar att detta system innehåller tablåreglerna T-SP, T-FT och T-BT. Det här innebär också att det är konsistent att påstå att $\neg A$, $\neg FA$ och $\Diamond A$ för något A, även om vi antar att det förflutna (och nuet) är nödvändigt. Följande semantiska tablå bevisar detta.

(1) $\neg((\neg A \wedge \neg FA) \rightarrow \neg\Diamond A), w_0t_0$
(2) $\neg A \wedge \neg FA, w_0t_0$ [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg\neg\Diamond A, w_0t_0$ [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $\Diamond A, w_0t_0$ [3, $\neg\neg$]
(5) $\neg A, w_0t_0$ [2, $\wedge$]
(6) $\neg FA, w_0t_0$ [2, $\wedge$]
(7) $G\neg A, w_0t_0$ [6, $\neg F$]
(8) $rw_0w_1t_0$ [4, $\Diamond$]
(9) A, w_1t_0 [4, $\Diamond$]

Låt mängden av alla möjliga världar bestå av w_0 och w_1 och mängden av alla tidpunkter bestå av t_0. Låt A vara falsk i w_0 vid t_0 och sann i w_1 vid t_0. Vidare, låt w_1 vara aletiskt tillgänglig från w_0 vid t_0. Då är $(\neg A \wedge \neg FA) \rightarrow \neg\Diamond A$ falsk i w_0 vid t_0 eftersom försatsen är sann och eftersatsen falsk i denna värld vid denna tidpunkt.

Om (FD3) är sann, måste dock någon premiss i MT1 vara falsk. (P2) och (GP) förefaller vara mycket rimliga principer och kräver inte att vi antar att tiden har några speciella egenskaper. (P1) är mer kontroversiell, eftersom den är giltig endast om tiden har vissa egenskaper. Vårt argument för (P1) är t.ex. hållbart endast om tiden är diskret och saknar början. Ett sätt att undvika slutsatsen i MT1 är alltså är förkasta denna premiss. I avsnitt 3 skall vi emellertid se att det finns en version av Mästerargumentet där vi inte behöver göra dessa antaganden. Så det tycks inte som om detta är en rimlig lösning.

Då återstår alltså att förkasta (FD1) eller (FD2), ett resultat som tycks stämma bra överens med Diodorus åsikter. (FD2) är giltig i alla normala modallogiska system och är intuitivt mycket rimlig. Följaktligen bör vi vara försiktiga med att göra oss av med denna princip. Den enda återstående sats vi tycks kunna ifrågasätta är alltså (FD1).

Vi skall nu se hur (FD1) tycks vara en alltför generell tolkning av D1. Vi har sett att (FD1) är giltig om A är atomär (i system av det slag som beskrivs i Rönnedal (2012)). Mer generellt gäller det att (FD1) är giltig om A inte direkt eller indirekt uttalar sig om framtiden, dvs. om A inte innehåller några symboler av formen F, G, ⟨F⟩, [G] e.dyl. Om vi tillåter att A kan bytas ut mot vilken sats som helst, B, så kan vi få ett resultat som uttalar sig om framtiden, trots att B är inbäddad bakom en P-operator. Betrakta substitutionen i steg 4 i MT1. Här har vi bytt ut A mot $\neg FA$. Resultatet är $P\neg FA \rightarrow \Box P\neg FA$, som säger att om det någon gång var fallet att det aldrig kommer att vara fallet att A, så är det nödvändigt att det någon gång var fallet att det aldrig kommer att vara fallet att A. Andra har gjort samma poäng tidigare (se t.ex. von Kutschera (1986)). Vi skall nu se att $P\neg FA \rightarrow \Box P\neg FA$ inte är giltig.

(1) $\neg(P\neg FA \rightarrow \Box P\neg FA), w_0t_0$
(2) $P\neg FA, w_0t_0$ [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg\Box P\neg FA, w_0t_0$ [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $\Diamond\neg P\neg FA, w_0t_0$ [3, $\neg\Box$]
(5) $t_1<t_0$ [2, P]
(6) $\neg FA, w_0t_1$ [2, P]
(7) $G\neg A, w_0t_1$ [6, $\neg$F]
(8) $rw_0w_1t_0$ [4, $\Diamond$]
(9) $\neg P\neg FA, w_1t_0$ [4, $\Diamond$]
(10) $H\neg\neg FA, w_1t_0$ [9, $\neg$P]
(11) $\neg\neg FA, w_1t_1$ [5, 10, H]
(12) FA, w_1t_1 [11, $\neg\neg$]
(13) $t_1<t_2$ [12, F]
(14) A, w_1t_2 [12, F]
(15) $\neg A, w_0t_2$ [7, 13, G]

I det här skedet är den enda grenen i trädet öppen och avslutad. Alltså är hela trädet öppet. Det innebär att $P\neg FA \rightarrow \Box P\neg FA$ inte är giltig i klassen av alla modeller. Vi kan använda den öppna grenen för att läsa av ett motexempel. Mängden av alla världar består av w_0 och w_1 och mängden av alla tidpunkter av t_0, t_1 och t_2. t_1 inträffar före både t_0 och t_2, och w_1 är tillgänglig från w_0 vid t_0. A är sann i w_1 vid t_2 och A är falsk i w_0 vid t_2. Det är lätt att se att $P\neg FA$ är sann i w_0 vid t_0 och att $\Box P\neg FA$ är falsk i w_0 vid t_0 i denna modell. Om tiden är jämförbar, måste vi anta att t_2 är identisk med t_0, att t_2 inträffar före t_0 eller att t_2 inträffar efter t_0. Om t_2 vore före t_0 eller identisk med t_0 och vårt system skulle innehålla T-SP, skulle vi ha $rw_0w_1t_2$; och om A vore atomär skulle vi då kunna sluta oss till A, w_0t_2. Men A är inte atomär och vi kan inte utesluta att t_2 inträffar senare än t_0 (såvida t_0 inte är den sista tidpunkten i tiden) och då kan vi inte sluta oss till $rw_0w_1t_2$ även om vårt system innehåller T-SP.

Problemet är att $P\neg FA$ inte enbart uttalar sig om det förflutna utan också om alla tidpunkter efter den tidpunkt vid vilken satsen värderas. Om jag säger: ”Igår var det fallet att det kommer att snöa om två dar”, så uttalar sig denna sats egentligen inte om det förflutna utan om framtiden. Satsen är ekvivalent med: ”Imorgon kommer det att snöa”. På liknande sätt förhåller det sig med $P\neg FA$. Huvudoperatorn är P, men satsen säger inte enbart något om det förflutna utan också om framtiden. Vi kan alltså hålla fast vid D1, men förkasta (FD1) i en absolut generell form. Resultatet är att vi kan acceptera alla satser i {D1, D2, D3} om vi förstår dem på rätt sätt. MT1 utesluter åtminstone inte detta.

Låt oss slutligen notera följande faktum. Om A är atomär, så är $(\neg A \wedge \neg FA) \rightarrow \neg\Diamond A$ giltig. Om A är atomär, så är t.o.m. $\neg A \rightarrow \neg\Diamond A$ giltig. Följande tablå bevisar detta.

Bevis av $(\neg A \wedge \neg FA) \rightarrow \neg\Diamond A$, då A är atomär.

(1) $\neg((\neg A \wedge \neg FA) \rightarrow \neg\Diamond A)$, w_0t_0
(2) $\neg A \wedge \neg FA$, w_0t_0 [1, $\neg\rightarrow$]
(3) $\neg\neg\Diamond A$, w_0t_0 [1, $\neg\rightarrow$]
(4) $\Diamond A$, w_0t_0 [3, $\neg\neg$]
(5) $\neg A$, w_0t_0 [2, $\wedge$]
(6) $\neg FA$, w_0t_0 [2, $\wedge$]
(7) $rw_0w_1t_0$ [4, $\Diamond$]
(8) A, w_1t_0 [4, $\Diamond$]
(9) A, w_0t_0 [7, 8, T-BT, A är atomär]
(10) * [5, 9]

Vi skall nu undersöka en alternativ tolkning av Mästerargumentet som inte förutsätter (P1) eller att tiden är diskret och saknar början.

3. Mästerargumentet, Tolkning 2 (MT2) (Weidemann)

Följande rekonstruktion av Diodorus Mästerargument bygger på en tolkning som presenteras i Weidemann (2008).

1. $\langle P\rangle A \rightarrow \Box\langle P\rangle A$	[FD1′]
2. $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\Diamond B \rightarrow \neg\Diamond A)$	[FD2]
3. $\Box(A \rightarrow [H]\langle F\rangle A)$	[Implicit premiss 3 (P3)]
4. $\neg\langle F\rangle A \rightarrow \neg[H]\langle F\rangle A$	[Implicit premiss 4 (P4)]
5. $\neg[H]A \rightarrow \neg\Diamond[H]A$	[1, ¬A/A, (GP)]
6. $\neg[H]\langle F\rangle A \rightarrow \neg\Diamond[H]\langle F\rangle A$	[5, ⟨F⟩A/A]
7. $\Box(A \rightarrow [H]\langle F\rangle A) \rightarrow$ $(\neg\Diamond[H]\langle F\rangle A \rightarrow \neg\Diamond A)$	[2, [H]⟨F⟩A/B]
8. $\neg\Diamond[H]\langle F\rangle A \rightarrow \neg\Diamond A$	[3, 7, SL]
9. $\neg\langle F\rangle A \rightarrow \neg\Diamond A$	[4, 6, 8, SL]

9 är ekvivalent med $\neg(A \vee FA) \rightarrow \neg\Diamond A$ och med $\Diamond A \rightarrow (A \vee FA)$. Detta argument, som vi skall kalla ”MT2”, är giltigt. Slutsatsen följer med nödvändighet ur premisserna. Också i denna rekonstruktion använder vi två implicita premisser. Men dessa kräver inte att vi antar att tiden har några speciella egenskaper, den behöver t.ex. inte vara diskret, jämförbar eller ändlös (bakåt). MT2 är därmed starkare än MT1 i den meningen att det utgår ifrån svagare premisser. Vi skall nu visa att de implicita premisserna i rekonstruktion 2 båda är teorem i alla de temporala aletiskt-deontiska system som beskrivs i Rönnedal (2012).

I uppsatsen Rönnedal (2012) introducerades [H], ⟨P⟩, [G], ⟨F⟩ genom definitioner. $[H]A = (A \wedge HA)$, $\langle P\rangle A = (A \vee PA)$, $[G]A = (A \wedge GA)$, $\langle F\rangle A = (A \vee FA)$. Använder vi dessa definitioner är $\Box(A \rightarrow [H]\langle F\rangle A)$ ekvivalent med $\Box(A \rightarrow ((A \vee FA) \wedge H(A \vee FA)))$ och $\neg\langle F\rangle A \rightarrow \neg[H]\langle F\rangle A$ ekvivalent med $\neg(A \vee FA) \rightarrow \neg((A \vee FA) \wedge H(A \vee FA))$. Vi visar nu att dessa är giltiga i alla de omnämnda temporala aletiskt-deontiska systemen.

3.1. Argument för premisserna

3.1.1. Argument för (P3)

Enligt (P3), $\Box(A \rightarrow [H]\langle F\rangle A)$, så är det nödvändigt att om A är sann, så är det och har alltid varit fallet att A är eller kommer att vara sann. Följande semantiska tablå bevisar giltigheten hos denna princip.

Bevis av $\Box(A \rightarrow [H]\langle F\rangle A)$ $[\Box(A \rightarrow ((A \vee FA) \wedge H(A \vee FA)))]$.

(1) $\neg\Box(A \rightarrow ((A \vee FA) \wedge H(A \vee FA)))$, w_0t_0

(2) $\Diamond\neg(A \rightarrow ((A \vee FA) \wedge H(A \vee FA)))$, w_0t_0 [1, $\neg\Box$]

(3) $rw_0w_1t_0$ [2, $\Diamond$]

(4) $\neg(A \rightarrow ((A \vee FA) \wedge H(A \vee FA)))$, w_1t_0 [2, $\Diamond$]

(5) A, w_1t_0 [4, $\neg\rightarrow$]

(6) $\neg((A \vee FA) \wedge H(A \vee FA))$, w_1t_0 [4, $\neg\rightarrow$]

↙	↘
(7) $\neg(A \vee FA)$, w_1t_0 [6, $\neg\wedge$]	(8) $\neg H(A \vee FA)$, w_1t_0 [6, $\neg\wedge$]
(9) $\neg A$, w_1t_0 [7, $\neg\vee$]	(10) $P\neg(A \vee FA)$, w_1t_0 [8, $\neg H$]
(11) $\neg FA$, w_1t_0 [7, $\neg\vee$]	(12) $t_1<t_0$ [10, P]
(13) * [5, 9]	(14) $\neg(A \vee FA)$, w_1t_1 [10, P]
	(15) $\neg A$, w_1t_1 [14, $\neg\vee$]
	(16) $\neg FA$, w_1t_1 [14, $\neg\vee$]
	(17) $G\neg A$, w_1t_1 [16, $\neg F$]
	(18) $\neg A$, w_1t_0 [12, 17, G]
	(19) * [5, 18]

3.1.2. Argument för (P4)

Enligt (P4), $\neg\langle F\rangle A \rightarrow \neg[H]\langle F\rangle A$, så gäller det att om det varken är eller kommer att vara fallet att A, så är det inte fallet att det både är och alltid har varit fallet att A är sann eller kommer att vara sann. $\neg\langle F\rangle A \rightarrow \neg[H]\langle F\rangle A$ är ekvivalent med $\neg(A \vee FA) \rightarrow \neg((A \vee FA) \wedge H(A \vee FA))$. Det är lätt att se att denna sats är giltig av rent satslogiska skäl. Här är ett tablåbevis.

Bevis av $\neg\langle F\rangle A \rightarrow \neg[H]\langle F\rangle A$ $[\neg(A \vee FA) \rightarrow \neg((A \vee FA) \wedge H(A \vee FA))]$.

(1) $\neg(\neg(A \vee FA) \rightarrow \neg((A \vee FA) \wedge H(A \vee FA)))$, w_0t_0

(2) $\neg(A \vee FA)$, w_0t_0 [1, $\neg\rightarrow$]

(3) $\neg\neg((A \vee FA) \wedge H(A \vee FA))$, w_0t_0 [1, $\neg\rightarrow$]

(4) $((A \vee FA) \wedge H(A \vee FA))$, w_0t_0 [3, $\neg\neg$]

(5) $A \vee FA$, w_0t_0 [4, $\wedge$]

(6) $H(A \vee FA)$, w_0t_0 [4, $\wedge$]

(7) * [2, 5]

MT2 tycks alltså vara en rimlig tolkning av Mästerargumentet och är i vissa avseenden intressantare än MT1. Kan MT2 också möjligtvis vara historiskt korrekt? Enligt våra källor till Mästerargumentet säger D1 att allt som är förflutet *och* sant är nödvändigt, medan D1 enligt MT2 säger att allt som är förflutet *eller* sant är nödvändigt. Dessa båda påståenden tycks inte vara ekvivalenta. Men möjligtvis har D1 någon gång blivit översatt på ett felaktigt eller missvisande sätt. Oavsett hur det förhåller sig med detta, så är tolkningen klart intressant. Eftersom det finns rimliga läsningar av D1 som är giltiga, nämligen då A inte handlar om något i framtiden.

3.2. Kritik av MT2

Men även om vi tolkar Mästerargumentet på detta sätt, kan vi förkasta (FD1′) i en generell form på samma sätt som vi förkastade (FD1) i en generell form. (FD1′) och (FD2) medför tillsammans med de plausibla premisserna 3 och 4 faktiskt negationen av (FD3). Och (FD1′) är en rimlig premiss, om A begränsas till satser som inte direkt eller indirekt uttalar sig om framtiden. Innehåller A operatorer som uttalar sig om framtiden, är premissen däremot inte nödvändigtvis (logiskt) sann. MT1 är därmed inte giltigt för alla A.

Följande semantiska tablå bevisar att $\langle P\rangle A \rightarrow \Box\langle P\rangle A$ är giltig när A är atomär, men inte nödvändigtvis när A inte är atomär. $\langle P\rangle A \rightarrow \Box\langle P\rangle A$ är per definition ekvivalent med $(A \vee PA) \rightarrow \Box(A \vee PA)$.

Bevis av $\langle P\rangle A \rightarrow \Box\langle P\rangle A$ $[(A \vee PA) \rightarrow \Box(A \vee PA)]$.

(1) $\neg((A \vee PA) \rightarrow \Box(A \vee PA)), w_0t_0$

(2) $A \vee PA, w_0t_0$ [1, $\neg\rightarrow$]

(3) $\neg\Box(A \vee PA), w_0t_0$ [1, $\neg\rightarrow$]

(4) $\Diamond\neg(A \vee PA), w_0t_0$ [3, $\neg\Box$]

(5) $rw_0w_1t_0$ [4, $\Diamond$]

(6) $\neg(A \vee PA), w_1t_0$ [4, $\Diamond$]

(7) $\neg A, w_1t_0$ [6, $\neg\vee$]

(8) $\neg PA, w_1t_0$ [6, $\neg\vee$]

(9) $H\neg A, w_1t_0$ [8, $\neg H$]

↙	↘
(10) A, w_0t_0 [2, $\vee$]	(11) PA, w_0t_0 [2, $\vee$]
(12) A, w_1t_0 [5, 10, T-FT, A atomär]	(13) $t_1<t_0$ [11, P]
(14) * [7, 12]	(15) A, w_0t_1 [11, P]
	(16) $rw_0w_1t_1$ [5, 13, T-SP]
	(17) $\neg A, w_1t_1$ [9, 13, H]
	(18) A, w_1t_1 [15, 16, T-FT, A atomär]
	(19) * [17, 18]

I beviset ovan har vi använt oss av det faktum att A är atomär i två steg: 12 och 18. Utan detta antagande kan vi inte sluta tablån, vilket visar att $\langle P\rangle A \rightarrow \Box\langle P\rangle A$ inte nödvändigtvis är giltig då A inte är atomär.

Slutligen kan det vara värt att notera att följande satser är giltiga: $PA \rightarrow \Box PA$, $\langle P\rangle A \rightarrow \Box\langle P\rangle A$, $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\Diamond B \rightarrow \neg\Diamond A)$, $\Box(A \rightarrow HFA)$ och $\Box(A \rightarrow [H]\langle F\rangle A)$, då $\Box A$ byts ut mot $(A \wedge GA)$.[32] Enligt Diodorus definitioner av grundläggande modala begrepp är $\Box A$ ekvivalent med $A \wedge GA$. Bevisen lämnas till läsaren.

$\langle P\rangle A$ (= $(A \vee PA)$) svarar mot Diodorus definition av möjlighetsbegreppet, och $[G]A$ (= $(A \wedge GA)$) svarar mot hans definition av nödvändighetsbegreppet. Enligt Diodorus är det med andra ord möjligt att A omm $\langle P\rangle A$ och det är nödvändigt att A omm $[G]A$. De system som beskrivs i Rönnedal (2012) innehåller separata nödvändighets- och möjlighetsoperatorer som *inte* är ”logiskt ekvivalenta” med $\langle P\rangle$ och $[G]$, dvs. det är inte fallet att $\Box A$ omm $[G]A$ och det är inte fallet att $\Diamond A$ omm $\langle P\rangle A$. Om dessa operatorer, $\Box$ och $\Diamond$, kan användas för att fånga in vad vi menar med att säga att något är nödvändigt respektive möjligt, så är det varken fallet att det är möjligt att A omm $\langle P\rangle A$ eller nödvändigt att A omm $[G]A$. Diskussionen visar på den filosofiska nyttan av de system som utvecklas i Rönnedal (2012).

4. Slutsats

Vi har i den här uppsatsen diskuterat Diodorus Cronus Mästerargument för att det möjliga är det som *är* eller *kommer att vara* sant. Vi har sett att det finns tolkningar av detta argument som är giltiga och att premisserna är rimliga. Samtidigt är slutsatsen intuitivt inte särskilt plausibel. Om alla premisser är sanna, måste vi acceptera att det inte finns några möjligheter som aldrig realiseras. Då är en pärla på botten av havet som ingen observerar eller någonsin kommer att observera inte observerbar, dvs. då är det inte möjligt att observera en pärla på botten av havet om ingen faktiskt observerar den eller kommer att observera den i framtiden. Då är det inte möjligt att dela upp ett tygstycke i två delar om ingen faktiskt delar upp det eller någonsin kommer att dela upp det. Och det är inte möjligt för dig att läsa en bok av Epiktetus om du inte faktiskt läser denna bok eller kommer att läsa den. Om det däremot finns möjligheter som aldrig realiseras, så måste åtminstone någon premiss i MT1 vara falsk och åtminstone någon premiss i MT2 vara falsk. Vi har sett hur vi kan förkasta (FD1) och (FD1′). Antag att det förflutna

[32] De två första satserna är giltiga om vi antar att tiden är transitiv; övriga formler kräver inga särskilda antaganden.

(och nuet) är nödvändigt eller determinerat. Då är (FD1) och (FD1′) giltiga när A är atomär, men inte nödvändigtvis när A inte är atomär. Mer generellt gäller det att (FD1) och (FD1′) är giltiga när A inte uttalar sig om framtiden. Men varken (FD1) eller (FD1′) är i allmänhet giltig. Varken MT1 eller MT2 är därför hållbart för alla A. Detta gör att vi kan acceptera alla satserna i {D1, D2, D3} om de tolkas på rätt sätt. Varken MT1 eller MT2 lyckas visa att denna mängd är inkonsistent. När A är atomär eller inte uttalar sig om framtiden är (FD1) och (FD1′) emellertid giltiga och därmed sanna, om vi antar att nuet (och det förflutna) är nödvändigt, vilket vi redan nämnt. Om de övriga premisserna också är sanna, måste då slutsatsen vara sann. Men i detta fall tycks konklusionen vara relativt oproblematisk. Antar vi att nuet (och det förflutna) är nödvändigt, följer det redan från det faktum att något inte är att det är (historiskt) omöjligt, att det är (historiskt) nödvändigt att det inte är. Vidare gäller det i så fall att något är möjligt endast om det faktiskt är. Detta utesluter inte att framtiden kan vara öppen och kontingent. Och det medför inte att endast det som faktiskt är eller kommer att vara är möjligt. Vi kan alltså, om vi vill och argumenten i den här uppsatsen är riktiga, hålla fast vid Diodorus Cronus premisser utan att ge upp uppfattningen att det kan finnas möjligheter som aldrig realiseras.

Referenser

Aristoteles. Den Nikomachiska Etiken.

Aristoteles. Om Himlen.

Aristoteles. Om Tolkning.

Aristoteles. Retoriken.

Bobzien, S. (2004). Dialectical School. I N. Zalta (red.) *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Hämtat från <http://plato.stanford.edu/entries/dialectical-school/> den 30 september 2014. Först publicerat 27 augusti 2004, uppdaterat 11 augusti 2011.

Butler, R. J. (1967). Aristotle and the ”Master Argument” of Diodorus by Jaakko Hintikka. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 32, Nr. 3, s. 402.

Denyer, N. (1981). Time and modality in Diodorus Cronus. *Theoria*, Vol. 47, Nr. 1, ss. 31-53.

Denyer, N. (2009). Diodorus Cronus: Modality, the Master Argument and Formalisation. *Humana Mente*, 8, ss. 33–46.

Epiktetus. Dissertationer.

Fitting, M. & Mendelsohn, R. L. (1998). *First-Order Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers.

Gaskin, R. (1995). *The Sea-Battle and the Master Argument. Aristotle and Diodorus Cronus on the Metaphysics of the Future*. Berlin, New York: de Gruyter.
Gaskin, R. (1998). Necessity or Contingency: The Master Argument. by Jules Vuillemin. *The Philosophical Review*, Vol. 107, Nr. 4, ss. 627-630.
Guerry, H. (1967). Rescher's Master Argument. *The Journal of Philosophy*, Vol. 64, Nr. 10, ss. 310-312.
Gundersen, L. (1997). The Master Argument and branching time. *Logic and Logical Philosophy* 5, ss. 49-60.
Hintikka, J. (1964). Aristotle and the "Master Argument" of Diodorus. *American Philosophical Quarterly*, Vol. 1, Nr. 2, ss. 101-114.
Jarmużek, T. & Pietruszczak, A. (2009). The Tense Logic for Master Argument in Prior's Reconstruction. *Studia Logica*, Vol. 92, Nr. 1, ss. 85-108.
McKirahan, R. (1979). Diodorus and Prior and the Master Argument. *Synthese*, Vol. 42, Nr. 2, Philosophical Logic, ss. 223-253.
Michael, F. S. (1976). What Is the Master Argument of Diodorus Cronus? *American Philosophical Quarterly*, Vol. 13, Nr. 3, ss. 229-235.
Needham, P. (1995). *A First Course in Modal Logic*. Department of Philosophy, Stockholm University.
Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.
Prior, A. N. (1955). Diodoran Modalities. *The Philosophical Quarterly*, Vol. 5, Nr. 20, ss. 205-213.
Prior, A. N. (1967). *Past, Present, and Future*. Oxford: Clarendon Press.
Remes, U. (1971). A Version of the "Master Argument" of Diodorus by Nicholas Rescher; Rescher's Master Argument by Herbert Guerry. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 36, Nr. 3, ss. 518-519.
Rescher, N. (1966). A Version of the "Master Argument" of Diodorus. *The Journal of Philosophy*, Vol. 63, Nr. 15, ss. 438-445.
Rescher, N. & Urquhart, A. (1971). *Temporal logic*. Wien: Springer-Verlag.
Rönnedal, D. (2012). Temporal alethic-deontic logic and semantic tableaux. *Journal of Applied Logic*, 10, ss. 219-237.
Rönnedal, D. (2012b). *Extensions of Deontic Logic: An Investigation into some Multi-Modal Systems*. Department of Philosophy, Stockholm University.
Sedley, D. (2009). Diodorus Cronus. I N. Zalta (red.) *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Hämtat från <http://plato.stanford.edu/entries/diodorus-

cronus/> den 30 september 2014. Först publicerat 4 augusti 2009, uppdaterat 10 augusti 2013.

Von Kutschera, F. (1986). Zwei modallogische Argumente für den Determinismus: Aristoteles und Diodor. *Erkenntnis*, Vol. 24, Nr. 2, ss. 203-217.

Vuillemin, J. (1996). *Necessity or Contingency: The Master Argument*. Stanford: CSLI.

Weidemann, H. (2008). Aristotle, the Megarics, and Diodorus Cronus on the Notion of Possibility. *American Philosophical Quarterly*, Vol. 45, Nr. 2, ss. 131-148.

White, M. J. (1980). Diodorus' "Master" Argument: A Semantic Interpretation. *Erkenntnis*, Vol. 15, Nr. 1, ss. 65-72.

White, M. J. (1980b). Facets of Megarian Fatalism: Aristotelian Criticisms and the Stoic Doctrine of Eternal Recurrence. *Canadian Journal of Philosophy*, Vol. 10, Nr. 2, ss. 189-206.

White, M. J. (1984). The Necessity of the Past and Modal-Tense Logic Incompleteness. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 25, Nr 1, ss. 59-71.

Voytko, V. (1997). Necessity or Contingency: The Master Argument by Jules Vuillemin. *The Review of Metaphysics*, Vol. 51, Nr. 2, ss. 454-456.

Åqvist, L. (2003). Future Contingents and Determinism in Aristotele's *De Interpretatione* IX: Some Logical Aspects of the So-Called Second Oldest Interpretation. *Logique & Analyse*, 181, ss. 13-48. Publicerad på nytt i *Filosofiska notiser*. Årgång 1, nr 1, ss. 3-39.

Daniel Rönnedal
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
daniel.ronnedal@philosophy.su.se

Tidslogik som Multimodal Logik

Daniel Rönnedal

Abstrakt
Tidslogik är en gren av logiken som handlar om temporala begrepp, satser, argument och system. Inom denna gren av logiken undersöker man t.ex. uttryck såsom ”Det kommer alltid vara fallet att”, ”Det kommer någon gång i framtiden vara fallet att”, ”Det har alltid varit fallet att”, ”Det var någon gång i det förflutna fallet att”. Logiska relationer mellan satser som innehåller temporala begrepp studeras och giltigheten hos argument som består av sådana satser analyseras. Ett multimodalt språk är ett modalt språk som inkorporerar flera olika modala operatorer. En multimodal semantik är en modal semantik som innehåller flera olika s.k. tillgänglighetsrelationer som svarar mot de olika modala operatorerna. Och ett multimodalt system är ett modalt system (av teorem) som är baserat på ett multimodalt språk. Multimodal logik är en gren av modallogiken som handlar om multimodala språk, semantiska teorier och system. I den här uppsatsen visar jag hur tidslogiken kan betraktas som en del av den multimodala logiken. Jag utvecklar ett antal så kallade semantiska tablåsystem och bevisar att dessa är sunda och fullständiga i relation till deras semantik.

1. Introduktion

Tidslogik är en gren av logiken som handlar om temporala begrepp, satser, argument och system. Inom denna gren av logiken undersöker man t.ex. uttryck såsom ”Det kommer alltid vara fallet att”, ”Det kommer någon gång i framtiden vara fallet att”, ”Det har alltid varit fallet att”, ”Det var någon gång i det förflutna fallet att”. Logiska relationer mellan satser som innehåller temporala begrepp studeras och giltigheten hos argument som består av sådana satser analyseras. Ett multimodalt språk är ett modalt språk som inkorporerar flera olika modala operatorer. En multimodal semantik är en modal semantik som innehåller flera olika s.k. tillgänglighetsrelationer som svarar mot de olika modala operatorerna. Och ett multimodalt system är ett modalt system (av teorem) som är baserat på ett multimodalt språk.

Filosofiska Notiser, Årgång 1, Nr. 1, December 2014, 59-90

Multimodal logik är en gren av modallogiken som handlar om multimodala språk, semantiska teorier och system. I den här uppsatsen visar jag hur tidslogiken kan betraktas som en del av den multimodala logiken. Jag utvecklar ett antal så kallade semantiska tablåsystem och bevisar att dessa är sunda och fullständiga i relation till deras semantik.[33]

Uppsatsen är indelad i fem avsnitt. Avsnitt 2 handlar om syntax. I avsnitt 3 beskriver jag den semantik som är gemensam för alla system, jag tar upp ett antal grundläggande begrepp och undersöker några möjliga egenskaper hos tiden. Avsnitt 4 handlar om bevisteori. Jag går igenom ett antal tablåregler och visar hur dessa kan användas för att generera en mängd semantiska tablåsystem. Avsnitt 5 innehåller sundhets- och fullständighetsteorem.

2. Syntax

Språket TS består av följande alfabet och satser.

2.1. Alfabet

En mängd satsbokstäver p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2, …
De satslogiska konnektiven $\neg$ (negation), $\wedge$ (konjunktion),
$\vee$ (disjunktion), $\supset$ (materiell implikation) och $\equiv$ (materiell ekvivalens).
De temporala operatorerna G, F, H, P, [G], $\langle$F$\rangle$, [H], $\langle$P$\rangle$.
Parenteser) och (.

2.2. Satser

Språket TS består av alla satser (välformade formler) som genereras från följande villkor.

Varje satsbokstav är en (atomär) sats.
Om A och B är satser, så är $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ och $(A \equiv B)$ satser.
Om B är en sats, så är också $\neg$B, GB, FB, HB, PB, [G]B, $\langle$F$\rangle$B, [H]B och $\langle$P$\rangle$B satser.
Ingenting annat är en sats.

[33] För mer information om tidslogik, se t.ex. Barringer, Fisher, Gabbay & Gough (2000), Burgess (1984), Finger, Gabbay & Reynolds (2002), Galton (1999), Goldblatt (1992), Kröger & Merz (2008), McArthur (1976), Needham (1975), Prior (1957), (1967), Rescher & Urquhart (1971), van Benthem (1983), Øhrstrøm & Hasle (1995).

A, B, C, D… representerar godtyckliga satser i språket (inte nödvändigtvis atomära). Den grekiska bokstaven Σ står för en mängd satser och den tomma mängden betecknas ∅. De satslogiska konnektiven är välkända från satslogiken. Parenteser runt välformade formler utelämnas i regel om ingen mångtydighet uppstår. Falsum kan introduceras genom en definition på vanligt vis. Övriga satser i språket läses på följande sätt.

GB: Det kommer alltid att vara fallet att B.
FB: Det kommer någon gång (i framtiden) vara fallet att B.
HB: Det har alltid varit fallet att B.
PB: Det har någon gång (i det förflutna) varit fallet att B.
[G]B: Det är och kommer alltid att vara fallet att B.
⟨F⟩B: Det är eller kommer någon gång (i framtiden) vara fallet att B.
[H]B: Det är och har alltid varit fallet att B.
⟨P⟩B: Det är eller har någon gång (i det förflutna) varit fallet att B.

3. Semantik

Den grundläggande tanken bakom den semantik som beskrivs i det här avsnittet är att tiden betraktas som en struktur, som en mängd element, en mängd tidpunkter som står i vissa tillgänglighetsrelationer till varandra. Dessa relationer inkluderar t.ex. relationen *inträffar tidigare än* och relationen *inträffar senare än*. Att tidslogiken tolkas som en (multi)modal logik innebär att denna struktur beskrivs ”inifrån”: sanningen (hos våra satser) är relativ till olika tidpunkter. En sats kan med andra ord vara sann vid en tidpunkt och falsk vid en annan. Vissa sanningar är emellertid eviga, är de sanna vid en tidpunkt är de sanna vid alla tidpunkter. Alla logiska sanningar är eviga.

Genom att införa olika villkor på tillgänglighetsrelationerna, kan vi tvinga denna struktur att ha en viss form. Vi kan t.ex. trycka ihop tidpunkterna till en linje, som vi sedan kan dra ut så att den blir oändlig i en eller båda riktningarna. Vi kan böja tiden så att den formar en cirkel eller så kan vi tillåta att det finns en första och/eller en sista tidpunkt. Vi kan packa tiden oändligt tätt, så att det mellan varje par av (distinkta) tidpunkter t och t′, finns en tidpunkt t″, eller så kan vi tillåta att den är diskret, m.m. Vi kan rada upp alla tidpunkter i det förflutna på ett led men låta framtiden vara öppen, så att tiden bildar ett kosmiskt träd som förgrenar sig mot framtiden men är determinerad i det förflutna. Vilka egenskaper tiden *faktiskt* har tycks åtminstone delvis vara en metafysisk eller empirisk fråga.

3.1. Grundläggande termer

Låt oss börja med att definiera en mängd grundläggande begrepp.

Ramar. En temporal ram, F, är en relationell struktur <T, <, >, ≤, ≥>, där T är en icke-tom mängd av tidpunkter, och <, >, ≤, ≥ är fyra dyadiska tillgänglighetsrelationer mellan tidpunkterna i T (< är en delmängd av T × T, etc.). Den intuitiva tolkningen av tillgänglighetsrelationerna är som följer.

$t_1 < t_2$: t_1 inträffar före/tidigare än t_2
$t_2 > t_1$: t_2 inträffar efter/senare än t_1
$t_1 \leq t_2$: t_1 inträffar samtidigt med eller före/tidigare än t_2
$t_2 \geq t_1$: t_2 inträffar samtidigt med eller efter/senare än t_1

Modeller. En temporal modell, M, är en struktur <F, V>, där F är en temporal ram och V är en värdering eller tolkningsfunktion, som tilldelar sanningsvärden T (sann) eller F (falsk) till varje satsbokstav vid varje tidpunkt i T.

Om M = <F, V> så säger vi att M är baserad på F. Vi kan också tala om en modell, M, direkt som en struktur <T, <, >, ≤, ≥, V>, där tillgänglighetsrelationerna och T tolkas som vanligt. Om t är ett element i T och T ingår i M eller F, så kan vi även säga att t är ett element eller ingår i M och F. Vt(p) = T (V(p, t) = T eller V(<p, t>) = T) innebär att tolkningsfunktionen V tilldelar p sanningsvärdet T vid tidpunkt t, dvs. att p är sann vid (eller i) tidpunkt t. Vt(p) = F (V(p, t) = F eller V(<p, t>) = F) innebär att tolkningsfunktionen V tilldelar p sanningsvärdet F vid tidpunkt t, dvs. att p är falsk vid (eller i) tidpunkt t. Låt M = <F, V>. Om Vt(p) = T, så säger vi att p är sann vid t i modell M under värdering V; och om Vt(p) = F, så säger vi att p är falsk vid t i modell M under värdering V. Om det i en given kontext är uppenbart vilken modell och värdering vi talar om, så kan vi utelämna ”i modell M” och ”under värdering V” och enbart tala om p som sann eller falsk vid (eller i) en given tidpunkt. ”**F**” representerar en klass av ramar, ”**M**” en klass av modeller.

3.2. Sanningsvillkor

$\Vdash_{M,t}$ B står för att B är sann vid tidpunkt t i modell M. De atomära satsernas sanningsvärden bestäms av tolkningsfunktionen V, dvs.

$\Vdash_{M,t}$ p om och endast om (omm) Vt(p) = T, för varje satsbokstav p i vårt språk.

Sanningsvillkoren för de satslogiska konnektiven är de gamla vanliga. För konjunktion gäller t.ex.:

$\Vdash_{M,\, t} (A \wedge B)$ omm $\Vdash_{M,\, t} A$ och $\Vdash_{M,\, t} B$.

$A \wedge B$ är alltså sann vid en tidpunkt t (i en modell M) omm A är sann vid t (i M) och B är sann vid t (i M). Övriga villkor ser ut på följande sätt.

$\Vdash_{M,\, t} GB$	omm	det för varje tidpunkt t' i T sådan att $t' > t$ gäller att $\Vdash_{M,\, t'} B$.
$\Vdash_{M,\, t} FB$	omm	det finns någon tidpunkt t' i T sådan att $t' > t$ och $\Vdash_{M,\, t'} B$.
$\Vdash_{M,\, t} HB$	omm	det för varje tidpunkt t' i T sådan att $t' < t$ gäller att $\Vdash_{M,\, t'} B$.
$\Vdash_{M,\, t} PB$	omm	det finns någon tidpunkt t' i T sådan att $t' < t$ och $\Vdash_{M,\, t'} B$.
$\Vdash_{M,\, t} [G]B$	omm	det för varje tidpunkt t' i T sådan att $t' \geq t$ gäller att $\Vdash_{M,\, t'} B$.
$\Vdash_{M,\, t} \langle F\rangle B$	omm	det finns någon tidpunkt t' i T sådan att $t' \geq t$ och $\Vdash_{M,\, t'} B$.
$\Vdash_{M,\, t} [H]B$	omm	det för varje tidpunkt t' i T sådan att $t' \leq t$ gäller att $\Vdash_{M,\, t'} B$.
$\Vdash_{M,\, t} \langle P\rangle B$	omm	det finns någon tidpunkt t' i T sådan att $t' \leq t$ och $\Vdash_{M,\, t'} B$.

Vid varje tidpunkt gäller det alltså att varje sats har exakt ett av de två sanningsvärdena, dvs. att varje sats är antingen sann eller falsk och inte både sann och falsk. Vi ser hur de olika tillgänglighetsrelationerna $<$, $>$, $\leq$ och $\geq$ används i sanningsvillkoren för satser vars huvudoperatorer är G, F, H, P, [G], $\langle F\rangle$, [H] och $\langle P\rangle$. GB är t.ex. sann vid en tidpunkt t omm B är sann vid varje tidpunkt t' som inträffar senare än t. FB är sann vid en tidpunkt t omm B är sann vid någon tidpunkt t' som inträffar senare än t. PB är sann vid en tidpunkt t omm B är sann vid någon tidpunkt t' som inträffar tidigare än t. [H]B är sann vid en tidpunkt t omm B är sann vid varje tidpunkt t' som inträffar samtidigt med eller tidigare än t. Etc.

3.3. Övriga semantiska begrepp

Vi befinner oss nu i en position där vi kan definiera flera viktiga semantiska begrepp.

Satisfierbarhet i en modell. En mängd satser **Σ** är satisfierbar i en modell M, Sat_M **Σ** omm det finns en värld i M i vilken alla element i **Σ** är sanna.

Giltighet i (eller på) en klass av ramar. En sats B är (semantiskt) giltig i (eller på) en klass av ramar **F** ($\Vdash_{\mathbf{F}}$ B) omm B är sann i varje värld i varje modell baserad på en ram i **F**. Vi skall också säga att B är logiskt sann i en klass av ramar omm B är giltig i denna klass.

Logisk konsekvens i (eller på) en klass av ramar. En sats B är en logisk konsekvens av en mängd satser **Σ** i (eller på) en klass av ramar **F** (**Σ** $\Vdash_{\mathbf{F}}$ B) omm det för varje modell M baserad på någon ram i **F** och tidpunkt t i M gäller att om alla element i **Σ** är sanna vid t i M, så är B sann vid t i M. Om **Σ** $\Vdash_{\mathbf{F}}$ B, så kan vi också säga att **Σ** medför B i **F** och att det argument vars premisser är **Σ** och slutsats B är giltigt i **F**.

På liknande sätt kan man även definiera flera andra begrepp, t.ex. giltighet i en klass av ramar, giltighet i en klass av modeller, logisk konsekvens i en klass av modeller. Om det i en viss kontext är uppenbart vilken klass av modeller eller klass av ramar vi talar om, kan vi utelämna uttrycken ”i en klass av modeller” och ”i en klass av ramar” och säga att en sats är giltig eller att en mängd satser medför en sats.

3.4. Villkor på temporala ramar

Vi skall undersöka några olika villkor som kan användas för att karaktärisera olika temporala ramar. Dessa villkor är indelade i två olika grupper. Den första gruppen säger något om de formella egenskaperna hos de temporala tillgänglighetsrelationerna $<$, $>$, $\leq$ och $\geq$. Den andra gruppen uttalar sig om hur de olika tillgänglighetsrelationerna förhåller sig till varandra. I tabell 1 och 2 är Q $<$, $>$, $\leq$ eller $\geq$, R $\leq$ eller $\geq$, och S $<$ eller $>$. Om R är $\leq$ så är S $<$, och om R är $\geq$ så är S $>$, och tvärt om. Om Q är $<$, så är Q^{-1} $>$ och tvärt om. Om Q är $\leq$, så är Q^{-1} $\geq$ och tvärt om.

3.4.1. Egenskaper hos de temporala tillgänglighetsrelationerna

Villkor	Formalisering av villkor
	Reflexivitet
C-QT	$\forall t\, t\, Q\, t$
	Ändlöshet bakåt

C-QPD	$\forall t \exists t' \, t' \, Q \, t$
	Ändlöshet framåt
C-QFD	$\forall t \exists t' \, t \, Q \, t'$
	Symmetri
C-QB	$\forall t \forall t'(t \, Q \, t' \supset t' \, Q \, t)$
	Transitivitet
C-Q4	$\forall t \forall t' \forall t''((t \, Q \, t' \wedge t' \, Q \, t'') \supset t \, Q \, t'')$
	Täthet
C-QDE	$\forall t \forall t'(t \, Q \, t' \supset \exists t''(t \, Q \, t'' \wedge t'' \, Q \, t'))$
	Gränser bakåt
C-QLB	$\forall t \forall t' \forall t''((t' \, Q \, t \wedge t'' \, Q \, t) \supset \exists t'''(t''' \, Q \, t' \wedge t''' \, Q \, t''))$
	Gränser framåt
C-QUB	$\forall t \forall t' \forall t''((t \, Q \, t' \wedge t \, Q \, t'') \supset \exists t'''(t' \, Q \, t''' \wedge t'' \, Q \, t'''))$
	Fullständighet
C-RF	$\forall t \forall t'(t \, R \, t' \vee t' \, R \, t)$
	Jämförbarhet
C-SC	$\forall t \forall t'(t \, S \, t' \vee t = t' \vee t' \, S \, t)$
	Konvergens bakåt
C-QPC	$\forall t \forall t' \forall t''((t' \, Q \, t \wedge t'' \, Q \, t) \supset (t' \, Q \, t'' \vee t' = t'' \vee t'' \, Q \, t'))$
	Konvergens framåt
C-QFC	$\forall t \forall t' \forall t''((t \, Q \, t' \wedge t \, Q \, t'') \supset (t' \, Q \, t'' \vee t' = t'' \vee t'' \, Q \, t'))$

Tabell 1

Det bör vara mer eller mindre uppenbart hur villkoren i tabell 1 skall tolkas. Jag skall emellertid göra några kommentarer.

Enligt villkoren C-≤T och C-≥T är ≤ och ≥ reflexiva. Givet vår intuitiva läsning av ≤ och ≥, är dessa villkor mycket rimliga. C-≤T, $\forall t \, t \leq t$, säger t.ex. att det för varje tidpunkt t gäller att t inträffar samtidigt med eller före t. Och det förefaller vara uppenbart korrekt att anta att allting inträffar samtidigt med sig självt. Vi kan också undersöka vad som händer om vi antar att < och > är reflexiva; men givet vår informella förståelse av dessa relationer är det ett mindre rimligt antagande. Tvärt om tycks det vara plausibelt att anta att dessa relationer är irreflexiva. För det förefaller vara en mycket rimlig hypotes att ingenting inträffar före sig självt eller efter sig självt. En del kanske t.o.m. skulle vilja betrakta detta som en begreppslig sanning. Vi kan, om vi vill, anta att < och > är irreflexiva, men det innebär inte att ytterligare satser i TS blir giltiga. Därför har jag inte explicit tagit upp dessa villkor. På samma sätt förhåller det sig med symmetri-villkoren. < och > förefaller inte vara symmetriska utan asymmetriska. Det tycks t.ex. vara fallet att om t inträffar före t′, så inträffar inte t′ före t. Trots att dessa villkor är intuitivt mycket rimliga, kan de ifrågasättas. Om tiden är cirkulär och transitiv, är våra tillgänglighetsrelationer varken irreflexiva eller asymmetriska. Tvärt om, då är alla tillgänglighetsrelationer reflexiva och symmetriska. Det är därför jag har tagit upp även dessa något kontra-intuitiva villkor.[34]

C-<PD, $\forall t\exists t' t' < t$, säger att det inte finns någon första tidpunkt. För varje tidpunkt t finns det en tidpunkt t′ sådan att t′ inträffar före t. Det förflutna är så att säga ändlöst. Detta kan t.ex. vara sant om tiden är linjär och det förflutna är oändligt, eller om tiden är cirkulär. Ett möjligt undantag är om tiden är linjär men börjar i en tidpunkt t sådan att $t < t$. Givet vår intuitiva tolkning av ”<”, är denna möjlighet emellertid inte särskilt plausibel, eftersom det skulle innebära att tiden är linjär men börjar i en tidpunkt som inträffar före sig själv.

På motsvarande sätt säger C->FD, $\forall t\exists t' t' > t$, att det inte finns någon sista tidpunkt. För varje tidpunkt t finns det en tidpunkt t′ sådan att t′ inträffar efter t. Framtiden är med andra ord i någon mening ändlös. Detta kan t.ex. vara sant om tiden är linjär och framtiden är oändlig, eller om tiden är cirkulär. Ett möjligt undantag i detta fall är om tiden är linjär men slutar i en tidpunkt t sådan att $t > t$. Inte heller denna möjlighet förefaller vara särskilt plausibel, eftersom det enligt vår intuitiva läsning av ”>” skulle innebära att tiden är linjär och slutar i en tidpunkt som inträffar efter sig själv.

Transitivitetsvillkoren säger att våra temporala relationer är transitiva. C-<4, $\forall t\forall t'\forall t''((t < t' \wedge t' < t'') \supset t < t'')$, innebär t.ex. att < är transitiv, dvs. om t inträffar före t′ och t′ inträffar före t″, så inträffar t före t″. Det är intuitivt mycket rimligt att anta att alla våra temporala tillgänglighetsrelationer är transitiva. Trots detta tycks det inte vara absolut säkert att tiden är transitiv. För om tiden är cirkulär och < är irreflexiv eller asymmetrisk, är < inte transitiv.

C-<DE, $\forall t\forall t'(t < t' \supset \exists t''(t < t'' \wedge t'' < t'))$, säger att tiden, eller mer precist att den temporala relationen <, är tät. Intuitivt innebär det att det mellan varje par av tidpunkter finns en tredje tidpunkt, eller att tiden är oändligt delbar. Mer precist säger villkoret att om tidpunkt t inträffar före tidpunkt t′ så finns det en tidpunkt t″ sådan att t inträffar före t″ och t″ inträffar före t′. Varje relation som är reflexiv är också tät. Det följer att om ≥ är reflexiv, så är ≥ tät.

---

[34] Jag hoppas kunna säga lite mer om en cirkulär tidsuppfattning i en kommande uppsats. Se vidare avsnitt 3.5.

Det här innebär att täthetsvillkoret inte nödvändigtvis medför att det finns oändligt många tidpunkter.

Enligt C-<C, $\forall t\forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$, gäller det för varje par av tidpunkter t och t′ att t inträffar före t′ eller att t är identisk med t′ eller att t′ inträffar före t. Detta villkor är ekvivalent med påståendet att det för varje par av distinkta tidpunkter t och t′ gäller att t inträffar före t′ eller t′ före t. Notera att villkoret även utesluter att det finns två olika tidpunkter som inträffar samtidigt, givet att vi antar att t inträffar samtidigt med t′ om det varken är fallet att t inträffar före t′ eller t′ före t. Om detta villkor är uppfyllt, förgrenar sig tiden varken framåt eller bakåt längs relationen <.

C-<PC, $\forall t\forall t'\forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$, förhindrar att tiden förgrenar sig bakåt och C-<FC, $\forall t\forall t'\forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$, att tiden förgrenar sig framåt längs relationen <. Om vi antar C-<PC, men inte C-<FC kan vi betrakta tiden som ett (eller en mängd) träd som förgrenar sig framåt, men inte bakåt i tiden. Detta är kanske en rimlig modell av tiden om det förflutna är determinerat men framtiden är öppen.

3.4.2. Relationer mellan de temporala relationerna

Villkor	Formalisering av villkor
	=R-Inklusion
C-=RI	$\forall t\forall t'(t = t' \supset t\,R\,t')$
	SR-Inklusion
C-SRI	$\forall t\forall t'(t\,S\,t' \supset t\,R\,t')$
	RS-Implikation
C-RSI	$\forall t\forall t'(t\,R\,t' \supset (t = t' \vee t\,S\,t'))$
	QQ^{-1}-konversion (inversion)
C-QQ^{-1}C	$\forall t\forall t'(t\,Q\,t' \supset t'\,Q^{-1}\,t)$
	SR-Ändlöshet bakåt
C-SRPD	$\forall t\exists t'(t'\,S\,t \wedge t'\,R\,t)$
	SR-Ändlöshet framåt
C-SRFD	$\forall t\exists t'(t\,S\,t' \wedge t\,R\,t')$
	RS-Transitivitet
C-RS4	$\forall t\forall t'\forall t''((t\,R\,t' \wedge t'\,S\,t'') \supset t\,S\,t'')$
	SR-Transitivitet
C-SR4	$\forall t\forall t'\forall t''((t\,S\,t' \wedge t'\,R\,t'') \supset t\,S\,t'')$
	SR-Gränser bakåt
C-SRLB	$\forall t\forall t'\forall t''((t'\,S\,t \wedge t''\,R\,t) \supset \exists t'''(t'''\,R\,t' \wedge t'''\,S\,t''))$

	SR-Gränser framåt
C-SRUB	$\forall t \forall t' \forall t''((t\ S\ t' \wedge t\ R\ t'') \supset \exists t'''(t'\ R\ t''' \wedge t''\ S\ t'''))$
	RS-Gränser bakåt
C-RSLB	$\forall t \forall t' \forall t''((t'\ R\ t \wedge t''\ S\ t) \supset \exists t'''(t'''\ S\ t' \wedge t'''\ R\ t''))$
	RS-Gränser framåt
C-RSUB	$\forall t \forall t' \forall t''((t\ R\ t' \wedge t\ S\ t'') \supset \exists t'''(t'\ S\ t''' \wedge t''\ R\ t'''))$
	RS-Permutation bakåt
C-RSPP	$\forall t \forall t' \forall t''((t'\ R\ t \wedge t''\ S\ t') \supset \exists t'''(t'''\ S\ t \wedge t''\ R\ t'''))$
	RS-Permutation framåt
C-RSFP	$\forall t \forall t' \forall t''((t\ R\ t' \wedge t'\ S\ t'') \supset \exists t'''(t\ S\ t''' \wedge t'''\ R\ t''))$
	SR-Permutation bakåt
C-SRPP	$\forall t \forall t' \forall t''((t'\ S\ t \wedge t''\ R\ t') \supset \exists t'''(t'''\ R\ t \wedge t''\ S\ t'''))$
	SR-Permutation framåt
C-SRFP	$\forall t \forall t' \forall t''((t\ S\ t' \wedge t'\ R\ t'') \supset \exists t'''(t\ R\ t''' \wedge t'''\ S\ t''))$

Tabell 2

Jag skall kort kommentera några av villkoren i tabell 2.

Enligt C=≤I, $\forall t \forall t'(t = t' \supset t \leq t')$, gäller det att om t är identisk med t′, så inträffar t samtidigt med eller före t′. Identitetsrelationen är med andra ord inkluderad i relationen *inträffar samtidigt med eller före*. Det här är ett mycket rimligt antagande som tycks vara omöjligt att förneka, eftersom det är rimligt att anta att allting inträffar samtidigt med sig självt.

Enligt C-<≤I, $\forall t \forall t'(t < t' \supset t \leq t')$, inträffar t samtidigt med eller före t′ om t inträffar före t′. Relationen *inträffar före* är med andra ord inkluderad i relationen *inträffar samtidigt med eller före*. Detta är ett mycket rimligt antagande. Givet vår informella läsning av ”<” och ”≤” tycks det vara en begreppslig sanning.

C-≤<I, $\forall t \forall t'(t \leq t' \supset (t = t' \vee t < t'))$, säger att om t inträffar samtidigt med eller före t′, så är t identisk med t′ eller också inträffar t före t′. Det här villkoret är mycket rimligt, och tycks vara begreppsligt sant, om vi antar att det inte finns flera olika tidpunkter som inträffar samtidigt. Finns det flera tidpunkter som inträffar samtidigt, är det emellertid inte nödvändigtvis sant.

Om vi antar (C=≤I), (C-<≤I) och (C-≤<I), kan vi definiera ”≤” i termer av ”<” på följande sätt: $\forall t \forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$. Enligt denna definition gäller det att t inträffar samtidigt med eller före t′ omm t är identisk med t′ eller t inträffar före t′. Detta förefaller vara en rimlig definition om vi antar att det inte finns flera olika tidpunkter som inträffar samtidigt.

Enligt C-<>C, $\forall t \forall t'(t < t' \supset t' > t)$, gäller det att om t inträffar före t′, så inträffar t′ efter t. Och enligt C-><C, $\forall t \forall t'(t > t' \supset t' < t)$, gäller det att om t inträffar efter t′, så inträffar t′ före t. Givet vår informella läsning av ”<” och ”>” är dessa villkor mycket rimliga. Tillsammans medför de att ”<” är konversen till ”>” och att ”>” är konversen till ”<”, dvs. att t inträffar före t′ omm t′ inträffar efter t ($\forall t \forall t'(t < t' \equiv t' > t)$) och att t inträffar efter t′ omm t′ inträffar före t ($\forall t \forall t'(t > t' \equiv t' < t)$). Dessa villkor förefaller vara begreppsligt sanna. Är det möjligt att den första januari år 1900 inträffar före den första januari år 2000 samtidigt som det är falskt att den första januari år 2000 inträffar senare än den första januari år 1900? Det tycks vara omöjligt.

3.5. Några samband mellan de olika ram-villkoren

Inte alla villkor vi har nämnt ovan är oberoende av varandra. I det här avsnittet tar jag upp några av de samband som råder mellan dessa. (En trevlig övning kan vara att bevisa alla påståenden i denna sektion.)

Om Q är reflexiv, så är Q ändlös bakåt, ändlös framåt och tät. $\forall t\, t \leq t$ medför t.ex. $\forall t \exists t'\, t' \leq t$, $\forall t \exists t'\, t \leq t'$ och $\forall t \forall t'(t \leq t' \supset \exists t''(t \leq t'' \wedge t'' \leq t'))$.

Om S är jämförbar, så är S konvergent bakåt och konvergent framåt. $\forall t \forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$ medför t.ex. $\forall t \forall t' \forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$ och $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$.

Om S är transitiv, jämförbar och ändlös framåt, så har S gränser framåt. $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t' < t'') \supset t < t'')$, $\forall t \forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$ och $\forall t \exists t'\, t < t'$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset \exists t'''(t' < t''' \wedge t'' < t'''))$. $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t' > t'') \supset t > t'')$, $\forall t \forall t'(t > t' \vee t = t' \vee t' > t)$ och $\forall t \exists t'\, t > t'$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t > t'') \supset \exists t'''(t' > t''' \wedge t'' > t'''))$.

Om S är transitiv, jämförbar och ändlös bakåt, så har S gränser bakåt. $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t' < t'') \supset t < t'')$, $\forall t \forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$ och $\forall t \exists t'\, t' < t$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset \exists t'''(t''' < t' \wedge t''' < t''))$. $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t' > t'') \supset t > t'')$, $\forall t \forall t'(t > t' \vee t = t' \vee t' > t)$ och $\forall t \exists t'\, t' > t$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t' > t \wedge t'' > t) \supset \exists t'''(t''' > t' \wedge t''' > t''))$.

Om S är konvergent bakåt och har gränser framåt, så är S konvergent framåt. $\forall t \forall t' \forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$ och $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset \exists t'''(t' < t''' \wedge t'' < t'''))$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$. $\forall t \forall t' \forall t''((t' > t \wedge t'' > t) \supset (t' > t'' \vee t' = t'' \vee t'' > t'))$ och $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t > t'') \supset \exists t'''(t' > t''' \wedge t'' > t'''))$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t > t'') \supset (t' > t'' \vee t' = t'' \vee t'' > t'))$.

Om S är konvergent framåt och har gränser bakåt, så är S konvergent bakåt. $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$ och $\forall t \forall t' \forall t''((t' <$

$t \wedge t'' < t) \supset \exists t'''(t''' < t' \wedge t''' < t''))$ medför t.ex. $\forall t\forall t'\forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$.

Om R är reflexiv och konvergent framåt, så har R gränser framåt. $\forall t t \leq t$ och $\forall t\forall t'\forall t''((t \leq t' \wedge t \leq t'') \supset (t' \leq t'' \vee t' = t'' \vee t'' \leq t'))$ medför $\forall t\forall t'\forall t''((t \leq t' \wedge t \leq t'') \supset \exists t'''(t' \leq t''' \wedge t'' \leq t'''))$. $\forall t t \geq t$ och $\forall t\forall t'\forall t''((t \geq t' \wedge t \geq t'') \supset (t' \geq t'' \vee t' = t'' \vee t'' \geq t'))$ medför $\forall t\forall t'\forall t''((t \geq t' \wedge t \geq t'') \supset \exists t'''(t' \geq t''' \wedge t'' \geq t'''))$.

Om R är reflexiv och konvergent bakåt, så har R gränser bakåt. $\forall t t \leq t$ och $\forall t\forall t'\forall t''((t' \leq t \wedge t'' \leq t) \supset (t' \leq t'' \vee t' = t'' \vee t'' \leq t'))$ medför $\forall t\forall t'\forall t''((t' \leq t \wedge t'' \leq t) \supset \exists t'''(t''' \leq t' \wedge t''' \leq t''))$. $\forall t t \geq t$ och $\forall t\forall t'\forall t''((t' \geq t \wedge t'' \geq t) \supset (t' \geq t'' \vee t' = t'' \vee t'' \geq t'))$ medför $\forall t\forall t'\forall t''((t' \geq t \wedge t'' \geq t) \supset \exists t'''(t''' \geq t' \wedge t''' \geq t''))$.

Om R är asymmetrisk, så är R irreflexiv. Om det finns en R-cirkel (en situation av följande form $t_1Rt_2 \wedge t_2Rt_3 \wedge \ldots \wedge t_{n-1}Rt_n \wedge t_nRt_1$) och R är transitiv, så är R inte irreflexiv. Om det finns en R-cirkel och R är transitiv, så är R inte asymmetrisk. Om det finns en R-cirkel och R är irreflexiv, så är R inte transitiv. Om det finns en R-cirkel och R är asymmetrisk, så är R inte transitiv.

Antag att Q′ är konversen till Q, dvs. att x Q y omm y Q′ x. Då gäller det att om Q har en av de formella egenskaperna reflexivitet, transitivitet, täthet eller jämförbarhet, så har också Q′ denna egenskap; och tvärt om. Vidare gäller det att om Q är ändlös bakåt, så är Q′ ändlös framåt, och tvärtom; om Q har gränser framåt, så har Q′ gränser bakåt, och tvärtom; och om Q är konvergent bakåt, så är Q′ konvergent framåt, och tvärtom.

Bl.a. gäller följande fakta. $\forall t\forall t'(t' \geq t \equiv t \leq t')$ och $\forall t t \leq t$ medför $\forall t t \geq t$. Med andra ord, om relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* är reflexiv och relationen *inträffar samtidigt med eller senare än* är konversen till denna relation, så är också relationen *inträffar samtidigt med eller senare än* reflexiv.

$\forall t\forall t'(t' > t \equiv t < t')$ och $\forall t\forall t'\forall t''((t < t' \wedge t' < t'') \supset t < t'')$ medför $\forall t\forall t'\forall t''((t > t' \wedge t' > t'') \supset t > t'')$. Dvs. om relationen *inträffar tidigare än* är transitiv och relationen *inträffar senare än* är konversen till denna relation, så är också relationen *inträffare senare än* transitiv.

$\forall t\forall t'(t' \leq t \equiv t \geq t')$ och $\forall t\forall t'(t \geq t' \supset \exists t''(t \geq t'' \wedge t'' \geq t'))$ medför $\forall t\forall t'(t \leq t' \supset \exists t''(t \leq t'' \wedge t'' \leq t'))$. Med andra ord, om relationen *inträffar samtidigt med eller senare än* är tät och relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* är konversen till denna relation, så är också relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* tät.

$\forall t\forall t'(t' > t \equiv t < t')$ och $\forall t\forall t'(t > t' \vee t = t' \vee t' > t)$ medför $\forall t\forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$. Detta innebär att om relationen *inträffar senare än* är jämförbar och relationen *inträffar tidigare än* är konversen till denna relation, så är också relationen *inträffar tidigare än* jämförbar.

$\forall t \forall t'(t < t' \equiv t' > t)$ och $\forall t \exists t' t' > t$ medför $\forall t \exists t' t < t'$. Dvs. om relationen *inträffar senare än* är ändlös bakåt och relationen *inträffar tidigare än* är konversen till denna relation, så är relationen *inträffar tidigare än* ändlös framåt.

$\forall t \forall t' \forall t''((t' > t \wedge t'' > t) \supset \exists t'''(t''' > t' \wedge t''' > t''))$ och $\forall t \forall t'(t < t' \equiv t' > t)$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset \exists t'''(t' < t''' \wedge t'' < t'''))$. Med andra ord, om relationen *inträffar senare än* har gränser bakåt och relationen *inträffar tidigare än* är konversen till denna relation, så har relationen *inträffar tidigare än* gränser framåt.

$\forall t \forall t' \forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset \exists t'''(t''' < t' \wedge t''' < t''))$ och $\forall t \forall t'(t' > t \equiv t < t')$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t > t'') \supset \exists t'''(t' > t''' \wedge t'' > t'''))$. Dvs. om relationen *inträffar tidigare än* har gränser bakåt och relationen *inträffar senare än* är konversen till denna relation, så har relationen *inträffar senare än* gränser framåt.

$\forall t \forall t' \forall t''((t' > t \wedge t'' > t) \supset (t' > t'' \vee t' = t'' \vee t'' > t'))$ och $\forall t \forall t'(t < t' \equiv t' > t)$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$. Alltså gäller det att om relationen *inträffar senare än* är konvergent bakåt och relationen *inträffar tidigare än* är konversen till denna relation, så är relationen *inträffar tidigare än* konvergent framåt.

$\forall t \forall t' \forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$ och $\forall t \forall t'(t' > t \equiv t < t')$ medför $\forall t \forall t' \forall t''((t > t' \wedge t > t'') \supset (t' > t'' \vee t' = t'' \vee t'' > t'))$. Således gäller det att om relationen *inträffar tidigare än* är konvergent bakåt och relationen *inträffar senare än* är konversen till denna relation, så är relationen *inträffar senare än* konvergent framåt.

Kalla ”$\forall t \forall t'(t\ R\ t' \equiv (t = t' \vee t\ S\ t'))$” DefR. Def≤, $\forall t \forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$, är t.ex. sann omm (C=≤I), (C-<≤I) och (C-≤<I) är sanna (se tabell 2). Om DefR är sann, så är R reflexiv, tät, ändlös framåt och ändlös bakåt. Antag att DefR är sann. Då gäller följande. Om S är transitiv, så är R transitiv. Om S är jämförbar, så är R fullständig. Om S är konvergent framåt, så är R konvergent framåt. Om S är konvergent bakåt, så är R konvergent bakåt. Om S har gränser framåt, så har R gränser framåt. Om S har gränser bakåt, så har R gränser bakåt. Om R är fullständig, så är S jämförbar. Om R är konvergent framåt, så är S konvergent framåt. Om R är konvergent bakåt, så är S konvergent bakåt.

Bl.a. gäller följande fakta. $\forall t \forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ medför $\forall t\, t \leq t$, $\forall t \forall t'(t \leq t' \supset \exists t''(t \leq t'' \wedge t'' \leq t'))$, $\forall t \exists t' t \leq t'$ och $\forall t \exists t' t' \leq t$. Dvs. om Def≤ är sann, så är relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* reflexiv, tät, ändlös framåt och ändlös bakåt.

$\forall t\forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t\forall t'\forall t''((t < t' \wedge t' < t'') \supset t < t'')$ medför $\forall t\forall t'\forall t''((t \leq t' \wedge t' \leq t'') \supset t \leq t'')$. Med andra ord, om Def≤ är sann och relationen *inträffar tidigare än* är transitiv, så är relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* också transitiv.

$\forall t\forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t\forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$ medför $\forall t\forall t'(t \leq t' \vee t' \leq t)$. Således gäller det att om Def≤ är sann och relationen *inträffar tidigare än* är jämförbar, så är relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* fullständig.

$\forall t\forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t\forall t'\forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$ medför $\forall t\forall t'\forall t''((t' \leq t \wedge t'' \leq t) \supset (t' \leq t'' \vee t' = t'' \vee t'' \leq t'))$. Med andra ord, om Def≤ är sann och relationen *inträffar tidigare än* är konvergent bakåt, så är relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* konvergent bakåt.

$\forall t\forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t\forall t'\forall t''((t < t' \wedge t < t'') \supset \exists t'''(t' < t''' \wedge t'' < t'''))$ medför $\forall t\forall t'\forall t''((t \leq t' \wedge t \leq t'') \supset \exists t'''(t' \leq t''' \wedge t'' \leq t'''))$. Alltså gäller det att om Def≤ är sann och relationen *inträffar tidigare än* har gränser framåt, så har relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* gränser framåt.

$\forall t\forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t\forall t'(t \leq t' \vee t' \leq t)$ medför $\forall t\forall t'(t < t' \vee t = t' \vee t' < t)$. Dvs. om Def≤ är sann och relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* är fullständig, så är relationen *inträffar tidigare än* jämförbar.

$\forall t\forall t'(t \leq t' \equiv (t = t' \vee t < t'))$ och $\forall t\forall t'\forall t''((t' \leq t \wedge t'' \leq t) \supset (t' \leq t'' \vee t' = t'' \vee t'' \leq t'))$ medför $\forall t\forall t'\forall t''((t' < t \wedge t'' < t) \supset (t' < t'' \vee t' = t'' \vee t'' < t'))$. Med andra ord, om Def≤ är sann och relationen *inträffar samtidigt med eller tidigare än* är konvergent bakåt, så är relationen *inträffar tidigare än* konvergent bakåt.

F har SR-gränser bakåt (framåt) om och endast om F har RS-gränser bakåt (framåt).

F är SR-ändlös bakåt (framåt) om och endast om F är RS-ändlös bakåt (framåt).

Om F är >≥-ändlös bakåt och < är konversen till > (och tvärt om) och ≤ är konversen till ≥ (och tvärt om), så är F <≤-ändlös framåt (och tvärt om). Om F är <≤-ändlös bakåt och < är konversen till > (och tvärt om) och ≤ är konversen till ≥ (och tvärt om), så är F >≥-ändlös framåt (och tvärt om).

Om F uppfyller villkoret ≤<-permutation bakåt och < är konversen till > (och tvärt om) och ≤ är konversen till ≥ (och tvärt om), så uppfyller F villkoret ≥>-permutation framåt (och tvärt om). Om F uppfyller villkoret ≥>-permutation bakåt och < är konversen till > (och tvärt om) och ≤ är konversen till ≥ (och tvärt om), så uppfyller F villkoret ≤<-permutation framåt (och tvärt om). Om F uppfyller villkoret <≤-permutation bakåt och < är konversen till > (och tvärt om) och ≤ är konversen till ≥ (och tvärt om), så uppfyller F villkoret >≥-permutation framåt (och tvärt om). Om F uppfyller villkoret >≥-permutation bakåt och < är konversen till > (och tvärt om) och ≤ är konversen till ≥ (och tvärt om), så uppfyller F villkoret <≤-permutation framåt (och tvärt om).

3.6. Klasser av ramar och deras logik

De villkor på ramar vi har tagit upp i avsnitt 3.4 kan användas för att tala om olika klasser av ramar. Vi skall säga att **F**(C_1, …, C_n) är klassen av alla ramar som uppfyller villkoren C_1, …, C_n. **F**(C-<4, C-<PC) är t.ex. klassen av alla ramar som uppfyller villkoren C-<4 och C-<PC.

Klassen av alla satser i TS som är giltiga i en klass av ramar **F**, S(**F**), kallas **F**’s logik eller det logiska systemet som är baserat på **F**. S(**F**) = {A ∈ TS : $\Vdash_{\mathbf{F}}$ A}. S(**F**(C-<4, C-<PC)) är t.ex. klassen av alla satser som är giltiga i klassen av alla ramar som uppfyller villkoren C-<4 och C-<PC.

Genom att införa vissa villkor på våra ramar kan vi alltså definiera en mängd logiska system. Dessa system är semantiskt karaktäriserade. I nästa sektion skall vi utveckla ett antal semantiska tablåsystem som svarar mot dessa.

4. Bevisteori

Vi skall nu undersöka ett antal semantiska tablåsystem som bl.a. kan användas för att avgöra om en sats är logiskt sann, logiskt falsk eller logiskt kontingent, om en mängd satser är konsistent eller inkonsistent och om ett argument är giltigt eller ogiltigt.

Evert Beth, se Beth (1955) och Beth (1959), ss. 186–201, 267–293, och 444–463, tycks ha varit den förste logiker som utvecklade ett semantiskt tablåsystem. Enligt Smullyan (1968) s. 3 kommer idén ursprungligen från Gerhard Gentzen (se Gentzen (1935) och Gentzen (1935b)). För mer information om semantiska tablåsystem, se t.ex. D’Agostino et al. (1999), Fitting & Mendelsohn (1998), Garson (2006), Jeffrey (1967), Priest (2008), Rönnedal (2012), (2012b) och Smullyan (1968).

Grundläggande begrepp, såsom träd, semantisk tablå, gren, öppen och sluten gren, teorem, bevis osv. definieras på vanligt sätt, se t.ex. Rönnedal

(2012b), s. 131. $\vdash_S$ B innebär att B är ett teorem i systemet S; och $\Sigma \vdash_S$ B innebär att B är härledbar från Σ i S.

Vi skall börja med att titta på ett antal semantiska tablåregler. Sedan skall vi se hur dessa kan användas för att skapa en mängd semantiska tablåsystem. Slutligen nämner jag ett antal teorem som kan bevisas i våra system.

4.1. Tablåregler

Det finns tre olika typer av tablåregler: satslogiska regler, (grundläggande) temporala regler och (temporala) tillgänglighetsregler. De två första ingår i alla tablåsystem. Olika tablåsystem innehåller emellertid olika tillgänglighetsregler. Genom att lägga till tillgänglighetsregler kan vi skapa starkare system. Dessa regler svarar mot de semantiska villkor som vi diskuterade i sektion 3.4. Tillgänglighetsreglerna kan delas in i två grupper, de som svarar mot olika formella egenskaper hos de olika tillgänglighetsrelationerna, och de som svarar mot olika relationer mellan tillgänglighetsrelationerna.

4.1.1. Satslogiska regler

De satslogiska reglerna är de gamla vanliga som brukar användas i semantiska tablåsystem (se t.ex. Rönnedal (2012b), s. 132, för en genomgång).

4.1.2. Grundläggande temporala regler

G	H	F	P
GA, i j > i ↓ A, j	HA, i j < i ↓ A, j	FA, i ↓ j > i A, j där j är ny	PA, i ↓ j < i A, j där j är ny
¬G	¬H	¬F	¬P
¬GA, i ↓ F¬A, i	¬HA, i ↓ P¬A, i	¬FA, i ↓ G¬A, i	¬PA, i ↓ H¬A, i

Tabell 3

[G]	[H]	⟨F⟩	⟨P⟩
[G]A, i j ≥ i ↓ A, j	[H]A, i j ≤ i ↓ A, j	⟨F⟩A, i ↓ j ≥ i A, j där j är ny	⟨P⟩A, i ↓ j ≤ i A, j där j är ny
¬[G]	¬[H]	¬⟨F⟩	¬⟨P⟩
¬[G]A, i ↓ ⟨F⟩¬A, i	¬[H]A, i ↓ ⟨P⟩¬A, i	¬⟨F⟩A, i ↓ [G]¬A, i	¬⟨P⟩A, i ↓ [H]¬A, i

Tabell 4

Id(I)	Id(II)	Id
A(i) i = j ↓ A(j)	A(i) j = i ↓ A(j)	…i… ↓ i = i

Tabell 5

De grundläggande identitetsreglerna är redundanta i system som inte innehåller några övriga ”identitetsregler” (regler som innehåller indentitets-tecknet).

4.1.3. Temporala tillgänglighetsregler

T-<4	T->4	T-≤4	T-≥4
i < j j < k ↓ i < k	i > j j > k ↓ i > k	i ≤ j j ≤ k ↓ i ≤ k	i ≥ j j ≥ k ↓ i ≥ k

Tabell 6

T-<PD	T->PD	T-≤PD	T-≥PD
j ↓ k < j där k är ny	j ↓ k > j där k är ny	j ↓ k ≤ j där k är ny	j ↓ k ≥ j där k är ny

Tabell 7

T-<T	T->T	T-≤T	T-≥T
…j…	…j…	…j…	…j…
↓	↓	↓	↓
j < j	j > j	j ≤ j	j ≥ j

Tabell 8

T-<B	T->B	T-≤B	T-≥B
i < j	i > j	i ≤ j	i ≥ j
↓	↓	↓	↓
j < i	j > i	j ≤ i	j ≥ i

Tabell 9

Reglerna T-<T och T->T är intuitivt inte särskilt plausibla, eftersom de svarar mot villkoren att relationerna *tidigare än* och *senare än* är reflexiva. Tvärt om förefaller dessa relationer vara irreflexiva. Inte heller reglerna T-<B, T->B, T-≤B eller T-≥B är särskilt tilltalande rent intuitivt, eftersom de svarar mot villkoren att de olika temporala relationerna är symmetriska, när åtminstone de två första i själva verket förefaller vara asymmetriska. Anledningen till att jag har inkluderat dessa är att om tiden är cirkulär och transitiv, så följer det att den också är reflexiv och symmetrisk. Och det tycks inte alls vara omöjligt att föreställa sig att tiden skulle kunna vara cirkulär. Är tiden linjär, är de emellertid inte rimliga.

T-≤F	T-≥F	T-<C	T->C
...i, j...	...i, j...	…i, j…	…i, j…
↙↘	↙↘	↙↓↘	↙↓↘
i ≤ j j ≤ i	i ≥ j j ≥ i	i < j i = j j < i	i > j i = j j > i

Tabell 10

T-<DE	T->DE	T-≤DE	T-≥DE
i < j	i > j	i ≤ j	i ≥ j
↓	↓	↓	↓
i < k	i > k	i ≤ k	i ≥ k
k < j	k > j	k ≤ j	k ≥ j
där k är ny	där k är ny	där k är ny	där k är ny

Tabell 11

T-≤PC	T-<PC	T-≥PC	T->PC
$j \leq i$	$j < i$	$j \geq i$	$j > i$
$k \leq i$	$k < i$	$k \geq i$	$k > i$
↙↓↘	↙↓↘	↙↓↘	↙↓↘
$j \leq k$ $j = k$ $k \leq j$	$j < k$ $j = k$ $k < j$	$j \geq k$ $j = k$ $k \geq j$	$j > k$ $j = k$ $k > j$

Tabell 12

T-<LB	T->LB	T-≤LB	T-≥LB
$j < i$	$j > i$	$j \leq i$	$j \geq i$
$k < i$	$k > i$	$k \leq i$	$k \geq i$
↓	↓	↓	↓
$l < j$	$l > j$	$l \leq j$	$l \geq j$
$l < k$	$l > k$	$l \leq k$	$l \geq k$
där l är ny	där l är ny	där l är ny	där l är ny

Tabell 13

T-<>C	T-><C	T-≤≥C	T-≥≤C
$i < j$	$i > j$	$i \leq j$	$i \geq j$
↓	↓	↓	↓
$j > i$	$j < i$	$j \geq i$	$j \leq i$

Tabell 14

T-=≤I	T-=≥I	T-≤<I	T-≥>I
$i = j$	$i = j$	$i \leq j$	$i \geq j$
↓	↓	↙↘	↙↘
$i \leq j$	$i \geq j$	$i = j$ $i < j$	$i = j$ $i > j$

Tabell 15

T-<≤I	T->≥I	T-<≤PD	T->≥PD
$i < j$	$i > j$	…i…	…i…
↓	↓	↓	↓
$i \leq j$	$i \geq j$	$j < i$	$j > i$
		$j \leq i$	$j \geq i$
		där j är ny	där j är ny

Tabell 16

T-<≤4	T->≥4	T-<≤LB	T->≥LB
$i < j$	$i > j$	$j < i$	$j > i$
$j \leq k$	$j \geq k$	$k \leq i$	$k \geq i$
↓	↓	↓	↓
$i < k$	$i > k$	$l \leq j$	$l \geq j$
		$l < k$	$l > k$
		där l är ny	där l är ny

Tabell 17

T-≤<PP	T-≥>PP	T-<≤PP	T->≥PP
$k < i$	$k > i$	$k \leq i$	$k \geq i$
$i \leq j$	$i \geq j$	$i < j$	$i > j$
↓	↓	↓	↓
$k \leq l$	$k \geq l$	$k < l$	$k > l$
$l < j$	$l > j$	$l \leq j$	$l \geq j$
där l är ny	där l är ny	där l är ny	där l är ny

Tabell 18

4.2. Tablåsystem

Ett tablåsystem är en mängd tablåregler. Ett (normalt) temporalt tablåsystem inkluderar alla satslogiska regler och alla grundläggande temporala regler. Det minimala (normala) temporala tablåsystemet kallas ”T”. Genom att lägga till någon delmängd av de tillgänglighetsregler som introducerades i avsnitt 4.1.3 får vi en extension av T. Vi använder följande konventioner för att benämna olika system. ”$TT_1 \ldots T_n$”, där $T_1, \ldots, T_n$ är en lista (möjligtvis tom) på temporala tillgänglighetsregler, står för ett temporalt tablåsystem som innehåller tillgänglighetsreglerna $T_1, \ldots,$ och T_n. ”Redundanta” bokstäver i namnen utelämnas. T<4<PC är t.ex. ett namn på det temporala tablåsystem som innehåller tillgänglighetsreglerna T-<4 och T-<PC.

Om S är ett tablåsystem, så är S’s logik, eller den logik som är baserad på S, L(S), mängden av alla satser i TS som kan bevisas i S, dvs. $L(S) = \{A \in TS : \vdash_S A\}$. L(T<4<PC) är t.ex. mängden av alla satser som kan bevisas i systemet T<4<PC, dvs. i det temporala tablåsystem som innehåller alla grundläggande temporala regler och tillgänglighetsreglerna T-<4 och T-<PC.

4.3. Exempel på teorem

I det här avsnittet skall vi nämna några teorem i olika temporala tablåsystem. Bevisen är ofta relativt enkla och utelämnade. (Vill man lära sig att handskas med systemen i den här uppsatsen kan det vara en bra övning att bevisa alla satser i det här avsnittet.)

Teorem. (i) Alla satser i tabell 19 är teorem i alla temporala tablåsystem. (ii) Byt ut varje förekomst av G mot en förekomst av H och varje förekomst av F mot en förekomst av P i tabell 19. Varje sats som är resultatet av en sådan substitution är ett teorem i varje temporalt tablåsystem. (iii) Byt ut varje förekomst av G mot en förekomst av [G] och varje förekomst av F mot en förekomst av ⟨F⟩ i tabell 19. Varje sats som är resultatet av en sådan substitution är ett teorem i varje temporalt tablåsystem. (iv) Byt ut varje förekomst av G mot en förekomst av [H] och varje förekomst av F mot en förekomst av ⟨P⟩ i tabell 19. Varje sats som är resultatet av en sådan substitution är ett teorem i varje temporalt tablåsystem.

$G(A \wedge B) \equiv (GA \wedge GB)$	$G(A \equiv B) \supset (GA \equiv GB)$
$(GA \vee GB) \supset G(A \vee B)$	$G(A \equiv B) \supset (FA \equiv FB)$
$F(A \wedge B) \supset (FA \wedge FB)$	$G(A \equiv B) \supset (\neg FA \equiv \neg FB)$
$F(A \vee B) \equiv (FA \vee FB)$	$(G(A \vee B) \wedge \neg FB) \supset GA$
$\neg F(A \vee B) \equiv (\neg FA \wedge \neg FB)$	$((GA \wedge GB) \wedge G((A \wedge B) \supset C)) \supset GC$
$(\neg FA \vee \neg FB) \supset \neg F(A \wedge B)$	$(G(A \supset (B \vee C)) \wedge (\neg FB \wedge \neg FC)) \supset \neg FA$
$(GA \wedge G(A \supset B)) \supset GB$	$((GA \vee GB) \wedge G((A \vee B) \supset C)) \supset GC$
$G(A \supset B) \supset (FA \supset FB)$	$(GA \wedge G(A \supset (B \wedge C)) \supset (GB \wedge GC)$
$(G(A \supset B) \wedge FA) \supset FB$	$(\neg FC \wedge G((A \vee B) \supset C)) \supset (\neg FA \wedge \neg FB)$
$G(A \supset B) \supset (\neg FB \supset \neg FA)$	$((FA \vee FB) \wedge G((A \vee B) \supset C)) \supset FC$
$(G(A \supset B) \wedge \neg FB) \supset \neg FA$	$(G(A \supset (B \wedge C)) \wedge (\neg FB \vee \neg FC)) \supset \neg FA$
$GA \vee (FA \wedge F\neg A) \vee \neg FA$	$(G(A \supset B) \wedge G(B \supset C)) \supset G(A \supset C)$

Tabell 19. Teorem i alla system

$(GA \wedge GB) \supset \langle F \rangle(A \wedge B)$	$[G](A \supset B) \supset ([G]A \supset FB)$
$([G]A \wedge [G]B) \supset F(A \wedge B)$	$([G]A \wedge [G](A \supset B)) \supset FB$
$(GA \vee GB) \supset \langle F \rangle(A \vee B)$	$[G]A \supset ([G](A \supset B) \supset FB)$
$([G]A \vee [G]B) \supset F(A \vee B)$	$[G](A \supset B) \supset (\neg FB \supset \neg [G]A)$
$[G](A \wedge B) \supset (\langle F \rangle A \wedge \langle F \rangle B)$	$(\neg FB \wedge [G](A \supset B)) \supset \neg [G]A$
$[G](A \wedge B) \supset (FA \wedge FB)$	$\neg FB \supset ([G](A \supset B) \supset \neg [G]A)$
$[G](A \supset B) \supset (GA \supset \langle F \rangle B)$	$[G](A \supset B) \supset (\neg \langle F \rangle B \supset \neg GA)$
$(GA \wedge [G](A \supset B)) \supset \langle F \rangle B$	$(\neg \langle F \rangle B \wedge [G](A \supset B)) \supset \neg GA$
$GA \supset ([G](A \supset B) \supset \langle F \rangle B)$	$\neg \langle F \rangle B \supset ([G](A \supset B) \supset \neg GA)$

Tabell 20. Teorem i T->≥PD

$[G](A \wedge B) \supset (GA \wedge GB)$	$[G](A \equiv B) \supset (GA \equiv GB)$
$([G]A \vee [G]B) \supset G(A \vee B)$	$[G](A \equiv B) \supset (FA \equiv FB)$
$([G]A \wedge [G]B) \supset G(A \wedge B)$	$[G](A \equiv B) \supset (\neg FA \equiv \neg FB)$
$F(A \wedge B) \supset (\langle F\rangle A \wedge \langle F\rangle B)$	$(GA \wedge [G](A \supset B)) \supset GB$
$F(A \vee B) \supset (\langle F\rangle A \vee \langle F\rangle B)$	$[G](A \supset B) \supset (GA \supset GB)$
$(FA \vee FB) \supset \langle F\rangle(A \vee B)$	$(FA \wedge [G](A \supset B)) \supset FB$
$\neg\langle F\rangle(A \vee B) \supset (\neg FA \wedge \neg FB)$	$[G](A \supset B) \supset (FA \supset FB)$
$(\neg\langle F\rangle A \vee \neg\langle F\rangle B) \supset \neg F(A \wedge B)$	$(\neg FB \wedge [G](A \supset B)) \supset \neg FA$
$(\neg\langle F\rangle A \wedge \neg\langle F\rangle B) \supset \neg F(A \vee B)$	$[G](A \supset B) \supset (\neg FB \supset \neg FA)$

Tabell 21. Teorem i T->≥I

$[G](A \supset B) \supset ([G]A \supset GB)$
$[G](A \supset B) \supset (FA \supset \langle F\rangle B)$
$[G](A \supset B) \supset (\neg\langle F\rangle B \supset \neg FA)$
$(G(A \vee B) \wedge \neg\langle F\rangle B) \supset GA$
$[G]((A \vee B) \supset C) \supset ((GA \vee GB) \supset GC)$
$[G]((A \vee B) \supset C) \supset ((FA \vee FB) \supset FC)$
$[G]((A \vee B) \supset C) \supset (\neg FC \supset (\neg FA \wedge \neg FB))$
$[G](A \supset (B \vee C)) \supset (FA \supset (FB \vee FC))$
$[G](A \supset (B \vee C)) \supset ((\neg FB \wedge \neg FC) \supset \neg FA)$
$[G]((A \wedge B) \supset C) \supset ((GA \wedge GB) \supset GC)$
$[G](A \supset (B \wedge C)) \supset (GA \supset (GB \wedge GC))$
$[G](A \supset (B \wedge C)) \supset (FA \supset (FB \wedge FC))$
$[G](A \supset (B \wedge C)) \supset ((\neg FB \vee \neg FC) \supset \neg FA)$
$(G(A \vee B) \wedge ([G](A \supset C) \wedge [G](B \supset C))) \supset GC$
$(G(A \vee B) \wedge ([G](A \supset C) \wedge [G](B \supset D))) \supset G(C \vee D)$
$(GA \wedge ([G](A \supset B) \wedge [G](A \supset C))) \supset (GB \wedge GC)$
$(G(A \wedge B) \wedge ([G](A \supset C) \vee [G](B \supset D))) \supset G(C \vee D)$
$(GA \wedge ([G](A \supset B) \vee [G](A \supset C))) \supset G(B \vee C)$
$(G(A \wedge B) \wedge ([G](A \supset C) \wedge [G](B \supset D))) \supset (GC \wedge GD)$

Tabell 22. Teorem i T->≥I

$[G](A \supset B) \supset (GA \supset FB)$
$(GA \wedge [G](A \supset B)) \supset FB$
$[G](A \supset B) \supset (\neg FB \supset \neg GA)$
$(FB \wedge [G](A \supset B)) \supset \neg GA$
$\neg(G(A \vee B) \wedge (\neg\langle F\rangle A \wedge \neg\langle F\rangle B))$
$[G]((A \vee B) \supset C) \supset ((GA \vee GB) \supset FC)$

$[G]((A \vee B) \supset C) \supset (\neg FC \supset (\neg GA \wedge \neg GB))$
$[G](A \supset (B \vee C)) \supset (GA \supset (FB \vee FC))$
$[G](A \supset (B \vee C)) \supset ((\neg FB \wedge FC) \supset \neg GA)$
$[G]((A \wedge B) \supset C) \supset ((GA \wedge GB) \supset FC)$
$[G]((A \wedge B) \supset C) \supset (\neg FC \supset (\neg GA \vee \neg GB))$
$[G]((A \wedge B) \supset C) \supset (\neg FC \supset (F\neg A \vee F\neg B))$
$[G](A \supset (B \wedge C)) \supset (GA \supset (FB \wedge FC))$
$[G](A \supset (B \wedge C)) \supset ((\neg FB \vee \neg FC) \supset \neg GA)$
$[G](A \supset (B \wedge C)) \supset ((\neg FB \vee \neg FC) \supset \neg GA)$
$(G(A \vee B) \wedge ([G](A \supset C) \wedge [G](B \supset C))) \supset FC$
$(G(A \vee B) \wedge ([G](A \supset C) \wedge [G](B \supset D))) \supset (FC \vee FD)$
$(GA \wedge ([G](A \supset B) \wedge [G](A \supset C))) \supset (FB \wedge FC)$
$(G(A \wedge B) \wedge ([G](A \supset C) \vee [G](B \supset D))) \supset (FC \vee FD)$
$(GA \wedge ([G](A \supset B) \vee [G](A \supset C))) \supset (FB \vee FC)$
$(G(A \wedge B) \wedge ([G](A \supset C) \wedge [G](B \supset D))) \supset (FC \wedge FD)$

Tabell 23. Teorem i T->≥PD

Teorem. Byt ut varje förekomst av G mot H, varje förekomst av [G] mot [H], varje förekomst av F mot P, och varje förekomst av $\langle F\rangle$ mot $\langle P\rangle$ i tabell 20-23. Då gäller det att (i) varje sats som är ett resultat av en sådan substitution i tabell 20 och 23 är ett teorem i T-<≤PD, (ii) varje sats som är ett resultat av en sådan substitution i tabell 21 och 22 är ett teorem i T-<≤I.

System	Teorem
T-<4	$HA \supset HHA$, $PPA \supset PA$
T->4	$GA \supset GGA$, $FFA \supset FA$
T-≤4	$[H]A \supset [H][H]A$, $\langle P\rangle\langle P\rangle A \supset \langle P\rangle A$
T-≥4	$[G]A \supset [G][G]A$, $\langle F\rangle\langle F\rangle A \supset \langle F\rangle A$
T-<D	$HA \supset PA$, $\neg(HA \wedge H\neg A)$
T->D	$GA \supset FA$, $\neg(GA \wedge G\neg A)$
T-≤D	$[H]A \supset \langle P\rangle A$, $\neg([H]A \wedge [H]\neg A)$
T-≥D	$[G]A \supset \langle F\rangle A$, $\neg([G]A \wedge [G]\neg A)$
T-≤T	$[H]A \supset A$, $A \supset \langle P\rangle A$
T-≥T	$[G]A \supset A$, $A \supset \langle F\rangle A$
T-<DE	$PA \supset PPA$, $HHA \supset HA$, $(A \vee H(\bot \vee HB)) \supset (A \vee HB)$
T->DE	$FA \supset FFA$, $GGA \supset GA$, $(A \vee G(\bot \vee GB)) \supset (A \vee GB)$

T-≤DE	$\langle P\rangle A \supset \langle P\rangle\langle P\rangle A$, $[H][H]A \supset [H]A$
T-≥DE	$\langle F\rangle A \supset \langle F\rangle\langle F\rangle A$, $[G][G]A \supset [G]A$
T-<LB	$PHA \supset HPA$
T->LB	$FGA \supset GFA$
T-≤LB	$\langle P\rangle[H]A \supset [H]\langle P\rangle A$
T-≥LB	$\langle F\rangle[G]A \supset [G]\langle F\rangle A$
T-<PC	$(PA \wedge PB) \supset (P(A \wedge B) \vee P(A \wedge PB) \vee P(PA \wedge B))$
	$(H(A \vee B) \wedge H(A \vee HB) \wedge H(HA \vee B)) \supset (HA \vee HB)$
	$H((A \wedge HA) \supset B) \vee H((B \wedge HB) \supset A)$
	$P(HB\wedge\neg A)\supset H(A\supset(HA\supset B))$, $H(A\supset(HA\supset B))\vee H(HB\supset A)$
T->PC	$(FA \wedge FB) \supset (F(A \wedge B) \vee F(A \wedge FB) \vee F(FA \wedge B))$
	$(G(A \vee B) \wedge G(A \vee GB) \wedge G(GA \vee B)) \supset (GA \vee GB)$
	$G((A \wedge GA) \supset B) \vee G((B \wedge GB) \supset A)$
	$F(GB\wedge\neg A)\supset G(A\supset(GA\supset B))$, $(G(A\supset(GA\supset B))\vee G(GB\supset A)$
T-≤PC	$(\langle P\rangle A\wedge\langle P\rangle B)\supset(\langle P\rangle(A\wedge B)\vee\langle P\rangle(A\wedge\langle P\rangle B)\vee\langle P\rangle(\langle P\rangle A\wedge B))$
	$([H](A\vee B)\wedge[H](A\vee[H]B)\wedge[H]([H]A\vee B))\supset([H]A\vee[H]B)$
T-≥PC	$(\langle F\rangle A\wedge\langle F\rangle B)\supset(\langle F\rangle(A\wedge B)\vee\langle F\rangle(A\wedge\langle F\rangle B)\vee\langle F\rangle(\langle F\rangle A\wedge B))$
	$([G](A\vee B)\wedge[G](A\vee[G]B)\wedge[G]([G]A\vee B))\supset([G]A\vee[G]B)$

Tabell 24

System	Teorem
T-<>C	$A \supset HFA$, $PGA \supset A$
T-><C	$A \supset GPA$, $FHA \supset A$
T-≤≥C	$A \supset [H]\langle F\rangle A$, $\langle P\rangle[G]A \supset A$
T-≥≤C	$A \supset [G]\langle P\rangle A$, $\langle F\rangle[H]A \supset A$
T-=≤I	$[H]A \supset A$, $A \supset \langle P\rangle A$
T-=≥I	$[G]A \supset A$, $A \supset \langle F\rangle A$
T-<≤I	$[H]A \supset HA$, $PA \supset \langle P\rangle A$
T->≥I	$[G]A \supset GA$, $FA \supset \langle F\rangle A$
T-≤<I	$\langle P\rangle A \supset (A \vee PA)$, $(A \wedge HA) \supset [H]A$
T-≥>I	$\langle F\rangle A \supset (A \vee FA)$, $(A \wedge GA) \supset [G]A$
T-<≤4	$HA \supset [H]HA$, $\langle P\rangle PA \supset PA$
T->≥4	$GA \supset [G]GA$, $\langle F\rangle FA \supset FA$
T-<≤PD	$HA \supset \langle P\rangle A$, $[H]A \supset PA$
T->≥PD	$GA \supset \langle F\rangle A$, $[G]A \supset FA$
T-≤<PP	$H[H]A \supset [H]HA$, $\langle P\rangle PA \supset P\langle P\rangle A$
T-≥>PP	$G[G]A \supset [G]GA$, $\langle F\rangle FA \supset F\langle F\rangle A$
T-<≤PP	$[H]HA \supset H[H]A$, $P\langle P\rangle A \supset \langle P\rangle PA$

T->≥PP	[G]GA ⊃ G[G]A, F⟨F⟩A ⊃ ⟨F⟩FA
T-<≤LB	P[H]A ⊃ [H]PA, ⟨P⟩HA ⊃ H⟨P⟩A
T->≥LB	F[G]A ⊃ [G]FA, ⟨F⟩GA ⊃ G⟨F⟩A

Tabell 25

Här följer några fler teorem i lite olika system.

Om S innehåller T-≥T och T->≥4, så är G[G]A ⊃ [G]GA och ⟨F⟩FA ⊃ F⟨F⟩A teorem i S. Om S innehåller T-≤T och T-<≤4, så är H[H]A ⊃ [H]HA och ⟨P⟩PA ⊃ P⟨P⟩A teorem i S.

Om S innehåller T->≥I, T-=≥I (eller T-≥T) och T-≥>I, så är G[G]A ⊃ [G]GA, ⟨F⟩FA ⊃ F⟨F⟩A, [G]GA ⊃ G[G]A och F⟨F⟩A ⊃ ⟨F⟩FA teorem i S. Om S innehåller T-<≤I, T-=≤I (eller T-≤T) och T-≤<I, så är H[H]A ⊃ [H]HA, ⟨P⟩PA ⊃ P⟨P⟩A, [H]HA ⊃ H[H]A och P⟨P⟩A ⊃ ⟨P⟩PA teorem i S.

Om S innehåller T-≥T, T->≥I och T-≥>I, så är [G]A ≡ (A ∧ GA) och ⟨F⟩A ≡ (A ∨ FA) teorem i S. Om S innehåller T-≤T, T-<≤I och T-≤<I, så är, [H]A ≡ (A ∧ HA) och ⟨P⟩A ≡ (A ∨ PA) teorem i S.

Om S innehåller T->4, T->LB och T-><C, så är (FA ∧ FB) ⊃ F(PA ∧ PB) och G(HA ∨ HB) ⊃ (GA ∨ GB) teorem i S. Om S innehåller T-<4, T-<LB och T-<>C, så är (PA ∧ PB) ⊃ P(FA ∧ FB) och H(GA ∨ GB) ⊃ (HA ∨ HB) teorem i S.

Om S innehåller T-<C och T-<4, så är H(HA ⊃ HB) ∨ H(HB ⊃ HA) ett teorem i S. Om S innehåller T->C och T->4, så är G(GA ⊃ GB) ∨ G(GB ⊃ GA) ett teorem i S.

Om S innehåller T-><C och T->PC, så är FA ⊃ G(PA ∨ A ∨ FA) och F(HA ∧ A ∧ GA) ⊃ GA teorem i S. Om S innehåller T-<>C och T-<PC, så är PA ⊃ H(FA ∨ A ∨ PA) och P(HA ∧ A ∧ GA) ⊃ HA teorem i S.

Om S innehåller T-<>C, T-><C och T->PC, så är PFA ⊃ (PA ∨ A ∨ FA), (HA ∧ A ∧ GA) ⊃ HGA teorem i S. Om S innehåller T-<>C, T-><C och T-<PC, så är FPA ⊃ (PA ∨ A ∨ FA), (HA ∧ A ∧ GA) ⊃ GHA teorem i S.

Om S innehåller T-<>C och T->4, så är FA ⊃ HFA och PGA ⊃ GA teorem i S. Om S innehåller T-><C och T-<4, så är PA ⊃ GPA och FHA ⊃ HA teorem i S.

Om S innehåller T->PD, T->4 och T-><C, så är FA ⊃ FPA och GHA ⊃ GA teorem i S. Om S innehåller T-<PD, T-<4 och T-<>C, så är PA ⊃ PFA och HGA ⊃ HA teorem i S.

Om S innehåller T-<>C, T-><C och T->PC, så är (HA ∧ A ∧ GA) ⊃ HGA och PFA ⊃ (PA ∨ A ∨ FA) teorem i S. Om S innehåller T-<>C, T-><C och T-<PC, så är (HA ∧ A ∧ GA) ⊃ GHA och FPA ⊃ (PA ∨ A ∨ FA) teorem i S.

Om S innehåller T->PD, T-<>C, T-><C och T-<4 (eller T->4), så är GHA ⊃ (HA ∧ A ∧ GA) och (PA ∨ A ∨ FA) ⊃ FPA teorem i S. Om S innehåller T-<PD, T-<>C, T-><C och T-<4 (eller T->4), så är HGA ⊃ (HA ∧ A ∧ GA) och (PA ∨ A ∨ FA) ⊃ PFA teorem i S.

Om S innehåller T-<>C och T-><C, så är PGA ⊃ GPA och FHA ⊃ HFA teorem i S.

Om S innehåller T-<>C, T-><C, T->PD, T->PC och T->4 (eller T-<4), så är GHA ⊃ HGA och PFA ⊃ FPA teorem i S. Om S innehåller T-<>C, T-><C, T-<PD, T-<PC och T-<4 (eller T->4), så är HGA ⊃ GHA och FPA ⊃ PFA teorem i S.

Om S innehåller T-<>C, T-≥≤C, T->≥I, T-≤<I och T-≥T (eller T-=≥I), så är P[G]A ⊃ [G]PA och ⟨F⟩HA ⊃ H⟨F⟩A teorem i S.

Om S innehåller T-<>C, T-><C, T->≥I, T-≥>I och T-≥T (eller T-=≥I), så är P[G]A ⊃ [G]PA och ⟨F⟩HA ⊃ H⟨F⟩A teorem i S. Om S innehåller T-<>C, T-><C, T-<≤I, T-≤<I och T-≤T (eller T-≤I), så är F[H]A ⊃ [H]FA och ⟨P⟩GA ⊃ G⟨P⟩A teorem i S.

Om S innehåller T-≤<I, T-≤T, T-<>C, T-><C, T->PC, T-<≤I, T->PD och T->4, så är G[H]A ⊃ [H]GA och ⟨P⟩FA ⊃ F⟨P⟩A teorem i S. Om S innehåller T-≥>I, T-≥T, T-<>C, T-><C, T-<PC, T->≥I, T-<PD och T-<4, så är H[G]A ⊃ [G]HA och ⟨F⟩PA ⊃ P⟨F⟩A teorem i S.

Om S innehåller T-≥T, T-<>C, T-><C, T->PD, T-≥>I, T->≥I, T->PC och T->4, så är [G]HA ⊃ H[G]A och P⟨F⟩A ⊃ ⟨F⟩PA teorem i S. Om S innehåller T-≤T, T-<>C, T-><C, T-<PD, T-<≤I, T-≤<I, T-<PC och T-<4, så är [H]GA ⊃ G[H]A och F⟨P⟩A ⊃ ⟨P⟩FA teorem i S.

Om S innehåller T-≤≥C, T-≥≤C, T-≤T, (eller T-≥T) och T-≥F (eller T-≤F), så är [G][H]A ⊃ [H][G]A och ⟨P⟩⟨F⟩A ⊃ ⟨F⟩⟨P⟩A teorem i S. Om S innehåller T-≤≥C, T-≥≤C, T-≤T, (eller T-≥T) och T-≤F (eller T-≥F), så är [H][G]A ⊃ [G][H]A och ⟨F⟩⟨P⟩A ⊃ ⟨P⟩⟨F⟩A teorem i S.

Om S innehåller T-<≤I, T-=≤I och T-<PC, så är H([H]A ⊃ B) ∨ H([H]B ⊃ A) ett teorem i S. Om S innehåller T->≥I, T-=≥I och T->PC, så är G([G]A ⊃ B) ∨ G([G]B ⊃ A) ett teorem i S.

5. Sundhets- och fullständighetsteorem

Låt S = TT-A_1…T-A_n vara ett normalt temporalt tablåsystem. Vi skall säga att S korresponderar med en klass av ramar, **F**, (och att **F** korresponderar med S) omm **F** = **F**(C-A_1, …, C-A_n).

S är (starkt) sunt i relation till (relativt till eller med avseende på) **F** omm $\Sigma \vdash_{S} A$ medför $\Sigma \Vdash_{\mathbf{F}} A$. S är (starkt) fullständigt i relation till (relativt till eller med avseende på) **F** omm $\Sigma \Vdash_{\mathbf{F}} A$ medför $\Sigma \vdash_{S} A$.

Vi skall nu visa att alla de temporala tablåsystem som vi kan konstruera med hjälp av våra tablåregler är sunda och fullständiga med avseende på deras semantik.

5.1. Sundhet

Låt M vara en modell och b en gren på en tablå. Då är b (eller mängden av satser på b) satisfierbar i M omm det finns en funktion, f, från de naturliga talen till mängden av alla tidpunkter T sådan att:

(i) A är sann i f(i) i M, för varje nod A, i på b;
(ii) om i < j är på b, så är f(i) < f(j) i M;
om i > j är på b, så är f(i) > f(j) i M;
om i ≤ j är på b, så är f(i) ≤ f(j) i M;
om i ≥ j är på b, så är f(i) ≥ f(j) i M;
om i = j är på b, så är f(i) = f(j) i M.

Om f uppfyller dessa villkor, skall vi säga att f visar att b är satisfierbar i M.

Lemma (Sundhetslemma). Låt b vara en gren på en tablå och M vara en (temporal) modell. Om b är satisfierbar i M och en tablåregel tillämpas på b, så produceras åtminstone en extension, b′, av b sådan att b′ är satisfierbar i M.

Bevis. Först visar vi att sundhetslemmat gäller för T. Sen utvidgar vi det till andra system. Detta görs på samma sätt som i olika modala system (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b) eller Priest (2008)). Jag kommer att gå igenom några tillgänglighetsregler. Utelämnade steg bevisas på liknande sätt. Stegen för de satslogiska reglerna är välkända. Stegen för de grundläggande temporala reglerna är enkla modifikationer av välkända bevis.

T-<4. Antag att vi har i < j och j < k på b, och att vi tillämpar T-<4 och får en utvidgad gren, b′, av b som innehåller i < k. Eftersom b är satisfierbar i M, gäller det att f(i) < f(j) och f(j) < f(k) i M. Det följer att f(i) < f(k) i M, eftersom M uppfyller villkoret C-<4.

T->C. Antag att vi har i och j på b, och att vi tillämpar T->C på denna gren. Då får vi tre utvidgningar av b, som slutar med i > j, i = j, respektive j > i. Eftersom b är satisfierbar i M, så är f(i) och f(j) i M. M uppfyller villkoret C->C. Alltså gäller det att f(i) > f(j), f(i) = f(j) eller f(j) > f(i) i M. Oavsett vilket så finns det en extension, b′, av b sådan att b′ är satisfierbar i M.

T-≤DE. Antag att vi har i ≤ j på b, och att vi tillämpar regeln T-≤DE och får i ≤ k och k ≤ j, där k är ny på grenen. Eftersom b är satisfierbar i M så finns det en funktion f sådan att f(i) ≤ f(j) i M. Alltså finns det någon tidpunkt t i M, sådan att f(i) ≤ t och t ≤ f(j). För M uppfyller villkoret C-≤DE. Låt f′ vara likadan som f förutom att f′(k) = t. Då gäller det att f′(i) ≤ f′(k) och f′(k) ≤ f′(j). Eftersom k inte förekommer på b, visar f′ att b′ är satisfierbar i M.

T-<>C. Antag att vi har i < j på b, och att vi tillämpar regeln T-<>C och får j > i. b är satisfierbar i M. Alltså finns det en funktion f sådan att f(i) < f(j) i M. Det följer att f(j) > f(i) i M, eftersom M uppfyller villkoret C-<>C.

T-=≤I. Antag att vi har i = j på b, och att vi tillämpar regeln T-=≤I och får i ≤ j. Då finns det en funktion f sådan att f(i) = f(j) i M. Ty b är satisfierbar i M. Det följer att f(i) ≤ f(j), eftersom M uppfyller villkoret C-=≤I.

T-≤<I. Antag att vi har i ≤ j på b, och att vi tillämpar regeln T-≤<I på denna gren. Då får vi två utvidgningar av b, som slutar med i = j (den vänstra grenen) respektive i < j (den högra grenen). Eftersom b är satisfierbar i M, så har vi f(i) ≤ f(j) i M. Det följer att f(i) = f(j) eller f(i) < f(j) i M, eftersom M uppfyller villkoret C-≤<I. I det första fallet är den vänstra grenen satisfierbar i M; i det andra den högra grenen. Oavsett vilket så finns det en extension, b′, av b sådan att b′ är satisfierbar i M.

T-≤<PP. Antag att vi har k < i och i ≤ j på b, och att vi tillämpar regeln T-≤<PP och får k ≤ l och l < j, där l är ny på grenen. Eftersom b är satisfierbar i M gäller det att f(k) < f(i) och f(i) ≤ f(j) i M. Alltså gäller det att f(k) ≤ t och t < f(j) för någon tidpunkt t i M. För M satisfierar villkoret C-≤<PP. Låt f′ vara likadan som f förutom att f′(l) = t. Det följer att f′(k) ≤ f′(l) och f′(l) < f(j) i M. Eftersom l inte förekommer på b, så visar f′ att b′ är satisfierbar i M. ■

Teorem (Sundhetsteorem). Låt S vara ett av de temporala system som vi diskuterar i denna uppsats och låt **F** vara den klass av ramar som korresponderar med S. Då är S starkt sunt med avseende på **F**.

Bevis. När vi väl har etablerat sundhetslemmat kan vi bevisa sundhetsteoremet på samma sätt som för olika modala system (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b) eller Priest (2008)). ■

5.2. Fullständighet

Inducerad modell (Def.IM). Låt b vara en öppen (avslutad) gren i en semantisk tablå, och låt I vara mängden av alla tal på b. Vi skall säga att i ~ j omm i = j, eller ”i = j” eller ”j = i” förekommer på b. ~ är en ekvivalensrelation och [i] är i’s ekvivalensklass (definierad av denna relation). Den temporala modell, M = <T, <, >, ≤, ≥, V>, som induceras från b definieras på följande sätt:

$T = \{t_{[i]}: i \in I\}$;
$t_{[i]} < t_{[j]}$ omm $i < j$ förekommer på b;
$t_{[i]} > t_{[j]}$ omm $i > j$ förekommer på b;
$t_{[i]} \leq t_{[j]}$ omm $i \leq j$ förekommer på b;
$t_{[i]} \geq t_{[j]}$ omm $i \geq j$ förekommer på b;
p är sann vid $t_{[i]}$, om p, i förekommer på b;
p är falsk vid $t_{[i]}$, om $\neg$p, i förekommer på b.

Om vårt tablåsystem inte innehåller några identitetsregler, reduceras ~ till identitet och [i] = i. Alltså kan vi i sådana system låta T vara $\{t_i: i \in I\}$ och göra oss av med ekvivalensklasserna. Notera också att $t_{[i]} = t_{[j]}$ omm i = j förekommer på b, givet definitionen av en inducerad modell och våra identitetsregler.

Lemma (Fullständighetslemma). Låt b vara en gren på en fullständig tablå och låt M vara en modell som induceras från b. Då gäller det att:
(i) Om A, i är på b, så är A sann i $t_{[i]}$, och
(ii) Om $\neg$A, i är på b, så är A falsk i $t_{[i]}$.

Bevis. Beviset är i allt väsentligt detsamma som för olika modala system (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b) eller Priest (2008)). Stegen för de satslogiska konnektiven och för de grundläggande temporala operatorerna är välkända eller modifikationer av välkända bevis. ■

Teorem (Fullständighetsteorem). Låt S vara ett av de system vi diskuterar i denna uppsats och låt **F** vara den klass av ramar som korresponderar med S. Då är S (starkt) fullständigt i relation till **F**.

Bevis. Beviset är i allt väsentligt detsamma som för olika modala system (se t.ex. Rönnedal (2012), (2012b) eller Priest (2008)).

De intressanta nya stegen är att vi måste visa att den modell som induceras från den öppna grenen, b, i varje fall är av rätt slag. Vi skall gå igenom några av alla steg. Övriga fall bevisas på liknande sätt.

C-<4. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$ och $t_{[j]} < t_{[k]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]}, t_{[k]} \in T$. Då förekommer i < j och j < k på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har T-<4 applicerats och vi har i < k på b. Det följer att $t_{[i]} < t_{[k]}$ [från Def.IM].

C-<PC. Antag att $t_{[j]} < t_{[i]}$ och $t_{[k]} < t_{[i]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]}, t_{[k]} \in T$. Då förekommer j < i och k < i på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har vi applicerat T-<PC och vi har j < k, j = k eller k < j på b. Om j = k är på b, så j

$\sim k$; och om $j \sim k$, så $[j] = [k]$. Det följer att $t_{[j]} < t_{[k]}$, $t_{[j]} = t_{[k]}$ eller $t_{[k]} < t_{[j]}$, vilket skulle bevisas [från Def.IM].

C-<LB. Antag att $t_{[j]} < t_{[i]}$ och $t_{[k]} < t_{[i]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]}, t_{[k]} \in T$. Då förekommer $j < i$ och $k < i$ på b [från Def.IM]. T-<LB har applicerats, eftersom b är fullständig. Alltså har vi $l < j$ och $l < k$ på b, där l är ny. Det följer att det finns en tidpunkt $t_{[l]}$ i T, sådan att $t_{[l]} < t_{[j]}$ och $t_{[l]} < t_{[k]}$ [från Def.IM].

C-<>C. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]} \in T$. Då har vi $i < j$ på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig har T-<>C tillämpats. Således har vi $j > i$ på b. Alltså kan vi sluta oss till att $t_{[j]} > t_{[i]}$ [från Def.IM].

C-=≤I. Antag att $t_{[i]} = t_{[j]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]} \in T$. Då är $[i] = [j]$ och $i \sim j$. Alltså, $i = j$, eller också förekommer ”$i = j$” eller ”$j = i$” på b. I samtliga fall har vi $i = j$ på b tack vare våra identitetsregler. Eftersom b är fullständig, så har C-=≤I tillämpats och vi har $i \leq j$ på b. Det följer att $t_{[i]} \leq t_{[j]}$ [från Def.IM].

T-≤<I. Antag att $t_{[i]} \leq t_{[j]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]} \in T$. Då förekommer $i \leq j$ på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig har T-≤<I applicerats. Alltså har vi antingen $i = j$ eller $i < j$ på b. Om $i = j$ är på b, så $i \sim j$; och om $i \sim j$, så $[i] = [j]$. Det följer att $t_{[i]} = t_{[j]}$ eller $t_{[i]} < t_{[j]}$, vilket skulle bevisas [från Def.IM].

C-<≤I. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]} \in T$. Då förekommer $i < j$ på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har T-<≤I applicerats och vi har $i \leq j$ på b. Det följer att $t_{[i]} \leq t_{[j]}$ [från Def.IM].

C-<≤4. Antag att $t_{[i]} < t_{[j]}$ och $t_{[j]} \leq t_{[k]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]}, t_{[k]} \in T$. Då har vi $i < j$ och $j \leq k$ på b [från Def.IM]. Eftersom b är fullständig, så har T-<≤4 tillämpats och $i < k$ förekommer på b. Det följer att $t_{[i]} < t_{[k]}$ [från Def.IM].

T-≤<PP. Antag att $t_{[k]} < t_{[i]}$ och $t_{[i]} \leq t_{[j]}$, där $t_{[i]}, t_{[j]}, t_{[k]} \in T$. Då förekommer $k < i$ och $i \leq j$ på b [från Def.IM]. T-≤<PP har tillämpats, eftersom b är fullständig. Alltså har vi $k \leq l$ och $l < j$ på b, där l är ny. Alltså finns det en tidpunkt $t_{[l]}$ i T, sådan att $t_{[k]} \leq t_{[l]}$ och $t_{[l]} < t_{[j]}$ [från Def.IM]. ■

Referenser

Barringer, H. Fisher, M. Gabbay, D. & Gough, G. (red.) (2000). *Advances in Temporal Logic*. Springer.

Beth, E. W. (1955). Semantic Entailment and Formal Derivability. *Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Afdeling Letterkunde, N.S., vol. 18, no. 13, Amsterdam, ss. 309–342. Publicerad på nytt i Hintikka (1969), ss. 9–41.

Beth, E. W. (1959). *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam.

Burgess, J. P. (1984). Basic Tense Logic. I D. Gabbay & F. Guenthner (red.) *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 2, Dordrecht: Reidel, ss. 89-133.

D'Agostino, M., Gabbay, D., Hähnle, R., & Posegga, J. (red.) (1999) *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fitting, M. & Mendelsohn, R. L. (1998). *First-Order Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers.

Finger, M. Gabbay, D. & Reynolds, M. (2002). Advanced Tense Logic. I D. Gabbay & F. Guenther (red.) *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 7, Kluwer Academic Publishers, ss. 43-203.

Galton, A. (1999). Temporal Logic. I N. Zalta (red.) *Stanford Encyclopedia* of Philosophy. Hämtat från <http://plato.stanford.edu/entries/logic-temporal/> den 17 oktober 2014. Först publicerat 29 november 1999, uppdaterat 7 februari 2008.

Garson, J. W. (2006). *Modal Logic for Philosophers*. New York: Cambridge University Press.

Gentzen, G. (1935). Untersuchungen über das Logische Shliessen I. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 176–210. Engelsk översättning "Investigations into Logical Deduction", i Szabo (1969).

Gentzen, G. (1935b). Untersuchungen über das Logische Shliessen II. *Mathematische Zeitschrift* 39, ss. 405–431. Engelsk översättning "Investigations into Logical Deduction", i Szabo (1969).

Goldblatt, R. (1992). *Logics of Time and Computation*. CSLI.

Hintikka, J. (1969). *The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford Readings in Philosophy, Oxford University Press.

Jeffrey, R. C. (1967). *Formal Logic: Its Scope and Limits*. New York: McGraw-Hill.

Kröger, F. & Merz, S. (2008). *Temporal Logic and State Systems*. Springer.

McArthur, R. P. (1976). *Tense Logic*. Dordrecht: Reidel Publishing.

Needham, P. (1975). *Temporal Perspective*. Filosofiska Studier 25, Uppsala Universitet.

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Prior, A. N. (1957). *Time and Modality*. Oxford.

Prior, A. N. (1967). *Past, Present and Future*. Oxford.

Rescher, N. & Urquhart, A. (1971). *Temporal logic*. Wien: Springer-Verlag.

Rönnedal, D. (2012). Temporal alethic-deontic logic and semantic tableaux. *Journal of Applied Logic*, 10, ss. 219-237.

Rönnedal, D. (2012b). *Extensions of Deontic Logic: An Investigation into some Multi-Modal Systems*. Department of Philosophy, Stockholm University.
Smullyan, R. M. (1968). *First-Order Logic*. Heidelberg: Springer-Verlag.
Szabo, M. E. (red.) (1969). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland, Amsterdam.
van Benthem, J. (1983). *The Logic of Time*. Dordrecht, Boston and London: Kluwer Academic Publishers.
Øhrstrøm P. & Hasle, P. F. V. (1995). *Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Daniel Rönnedal
Filosofiska institutionen
Stockholms universitet
daniel.ronnedal@philosophy.su.se

Informational Models in Deontic Logic: A Comment on “Ifs and Oughts” by Kolodny and MacFarlane

Karl Pettersson

Abstract
Recently, in their paper “Ifs and Oughts”, Niko Kolodny and John MacFarlane have proposed modeling deontic logic on the basis of so-called informational models, with a new interpretation of both the deontic obligation operator and the indicative conditional, and claim that they can use this approach to solve some problems related to the conflict between so-called subjective (e.g. versions of consequentialism according to which the expected value of different alternatives given the beliefs or knowledge of an agent are morally relevant) and objective versions of the moral “ought” (e.g. versions of consequentialism according to which the consequences that actually would be realized by different alternatives are morally relevant). In this paper, I will critically discuss their claims. I claim that at least their indicative conditional, given the normative assumptions they seem to accept, yield problematic results in some contexts, and that its alleged benefits in the cases they discuss can be explained in other ways, viz. by distinguishing between different senses of the normative expressions.

1. The Trapped Miners

Kolodny and MacFarlane begin their recent paper “Ifs and Oughts” by presenting a scenario (Kolodny & MacFarlane 2010, p.115f) with the same structure as a well-known example from Frank Jackson (Jackson 1991, p.462f), where it is certain that the alternative with best actual outcome does not have the greatest expected value, given the available information.

> **(Trap)** Ten miners are trapped either in shaft *A* or *B*, but we cannot know which. We can block just one shaft from a threatening flood with sandbags, and if we do that, all the water will go into the other shaft and drown any miners inside. If we block neither shaft, both shafts will fill halfway with water, and just one miner will be drowned.

Kolodny and MacFarlane accept the following four sentences as true in (Trap):

[1] We ought to block neither shaft.
[2] If the miners are in shaft *A*, we ought to block shaft *A*.
[3] If the miners are in shaft *B*, we ought to block shaft *B*.
[4] Either the miners are in shaft *A*, or the miners are in shaft *B*.

They take it as "obvious" that the outcome of the deliberation should be ([1]). (Even if they do not explicily say so, we may assume that the probability, given our evidence, that they are in *A* is approximately 0.5, and the same, of course, for the probability that they are in *B*.) At the same time, "in deliberating what to do", ([2]) and ([3]) seem "natural to accept". But the sentences ([2])–([4]) seem to entail:

[5] Either we ought to block shaft *A*, or we ought to block shaft *B*.

This is inconsistent, or at least yields a dilemma (viz. that we both ought and ought not to block one of the shafts), with ([1]). They show how the argument from ([2])–([4]) to ([5]) can be shown to be valid, with standard disjunction and e.g. material conditional (they do not explicitly assume any specific conditional: any connective validating modus ponens would do) (Kolodny & MacFarlane 2010, p.127). In the argument, they just use three well-known rules of classical logic to derive the problematic conclusion: modus ponens, and introduction and elimination of disjunction. Rejecting any of them does not seem *prima facie* plausible. Nevertheless, Kolodny's and MacFarlane's solution partly consists in proposing a new type of indicative conditional, for which modus ponens is severely restricted, after having discussed and rejected various maybe *prima facie* plausible solutions of the puzzle.

Some of their arguments against alternative solutions are of special interest for what follows. They consider an "objectivist" conception of ought, which would imply rejecting ([1]).

> **Objectivism** "*S* ought (at *t*) to do ϕ" is true iff ϕ-ing is the best choice available to *S* in light of all the fact, known and unknown (Kolodny & MacFarlane 2010, p.117).

They accept a common line argument against moral views of this type, viz. that the objectivist "ought" becomes useless in deliberation under limited information. They also argue against the opposite "subjectivist" conception, which would imply rejecting ([2]) and ([3]).

> **Subjectivism** "*S* ought (at *t*) to do ϕ" is true iff ϕ-ing is the best choice available to *S* in light of what *S* knows at *t* (Kolodny & MacFarlane 2010, p.118).

They claim that (Subjectivism) "cannot make good sense of the use of "ought in *advice*" (Kolodny & MacFarlane 2010, p.119), and they give an example with their Dialogue 1, where the deliberating Agent in the (Trap) is confronted with an Adviser, who knows that the miners are in fact in shaft *A*, and then would disagree with Agent's judgment that Agent ought to block neither shaft, and instead give the advice that *A* ought to block shaft *A*, which would be false according to (Subjectivism).

One might try to remove the conflict between the premises in (Trap) by interpreting the "ought" in ([1]) according to (Subjectivism), and the "ought" in ([2]), ([3]) and ([5]) according to (Objectivism) (Kolodny & MacFarlane 2010, p.120). Against this, they argue that we would have no genuine disagreement between Agent and Adviser in Dialogue 1, if we try to secure the truth of Adviser's advice statement that *A* ought to be blocked by interpreting this advice according to (Objectivism), while Agent's statement is interpreted according to (Subjectivism). They also give further examples, with their Dialogoue 2, where Adivser's advice cannot be interpreted according to (Objectivism), but rather seems to refer to what is best in light of some limited information, which, however, is more inclusive than Agent's initial information (Kolodny & MacFarlane 2010, p.121).

2. An Alleged Solution

In order to solve the paradox, Kolodny and MacFarlane, present their own modal semantics, with a new interpretation of the epistemic and deontic modals, and an indicative conditional, for which modus ponens is only restrictedly valid (Kolodny & MacFarlane 2010, p.130–136).

I will not recapitulate the details of their semantics in this paper. The truth of a sentence ϕ is assigned relative to a world *w* and an information-state (set of worlds) *i*. For evalutation of the deontic and epistemic modalities, they use an operator, $\Box_f$ indexed to a selection function.

> $\ulcorner\Box_f\phi\urcorner$ is true at $\langle w, i\rangle$ iff for all $w' \in f(i)$, ϕ is true at w' (Kolodny & MacFarlane 2010, p.131).

The selection function may be an epistemic function e that selects a set of world-states that might, as far as this state knows, be actual, or a deontic function d, that selects a set of, in some normative sense, ideal world-states, given an information-state.

Kolodny and MacFarlane also define an indicative conditional, after first defining the notions of truth throughout an information state, and a maximal ϕ-subset (Kolodny & MacFarlane 2010, p.135).

> **True Throughout** ϕ is true throughout an information state i, iff for all $w \in i$, ϕ is true at $\langle w, i\rangle$.

> **Maximal ϕ-subset** i' is a maximal ϕ-subset of i iff (a) for all $w \in i'$, ϕ is true throughout i', and (b) there is no i'' such that $i' \subset i'' \subseteq i$ and ϕ is true throughout i''.

> **if** $\ulcorner[\text{if } \phi]\psi\urcorner$ is true at $\langle w, i\rangle$ iff ψ is true at $\langle w, i'\rangle$ for every maximal ϕ-subset i' of i.

Kolodny and MacFarlane say that the normative judgment ([1]) would be ratified by a version of consequentialism telling us to maximize expected utility, but also by "most reasonable deontological and virtue theories" (Kolodny & MacFarlane 2010, p.115). In the situation where we do not know where the miners are, we can assume that we have an information state containing both worlds where they are in shaft A and worlds where they are in shaft B. Let inX stand for a proposition stating that the miners are in shaft A, and blX stand for a proposition that shaft X is blocked. In that case, the deontic selection function may select worlds where we do not block any of the shafts, i.e. $\Box_d\neg(blA \vee blB)$ will come out as true. On the other hand, when we evaluate a conditional norm, e.g. ([2]), we only use sets of worlds where they are in shaft A as arguments in the deontic selection function, and it then gives the result that we ought to block shaft A, i.e. $[\text{if } inA]\Box_d\, blA$, will come out as true.

But how are we to avoid reaching the unwanted conclusion ([5]), that we ought to block either A or B, by means of hypothetical modus ponens? Well, if we assume that it is true at $\langle w, i \rangle$ that the miners are in shaft *A*, the information state *i* will still contain worlds where they are in shaft *B*, and we cannot use modus ponens to derive that we ought to block shaft *A*, because the deontic operator is sensitive to the whole information state.

However, if it is assumed that it is known that they are in shaft *A*, and that we, if so, ought to block shaft *A*, we can derive that we ought to block shaft *A*.

We can also make hypothetical derivations with apparently the same structure as the, in their system, invalid derivation from ([2])–([4]) to ([5]). They have the following example (Kolodny & MacFarlane 2010, p.141):

[6] If the miners are in shaft *A*, they have a jackhammer.
[7] If the miners are in shaft *B*, they have a blowtorch.
[8] Either the miners are in shaft *A*, or the miners are in shaft *B*.
[9] So, either they have a jackhammer or they have a blowtorch.

Kolodny and MacFarlane show that an argument like that from ([6])–([8]) to ([9]), where the consequents in ([6]) and ([7]), unlike the deontic consequents in ([2]) and ([3]), are not relative to the information state, is valid in their semantics (given that the antecedent is also invariant among either worlds or information-states) (Kolodny & MacFarlane 2010, p.141f).

One might ask how Kolodny's and MacFarlane's model is able to handle the problems with explaining moral disagreement that they claim create serious problem for the subjectivist and disambiguation solution. We must recall that there is a "relevant" information-state in a context where a sentence is assessed (Kolodny & MacFarlane 2010, p.141f). Agent and Adviser in the dialogues would thus be disagreeing about what is true given a world-state and a certain relevant information-state. They are unclear about what this relevant state would be in this situation, but it could presumably be something like the set of state-descriptions that might, given the maximal information available to Adviser and Agent (with the help of Adviser), depict the actual world.

3. Problems for the Model

3.1. A Problematic Case

As we have seen, Kolodny and MacFarlane intend their model to reconcile some, in their view, appealing features of subjectivist and objetivist consequentialist principles by making the deontic operator relative to information states. But how helpful is it for that purpose? Let me describe a case where I claim they get into trouble.

> **(Fever)** You wake up one morning, feeling feverish. If you are really running a fever, going to school will have worse consequences than staying at home, because you will then also infect some of your fellows. But if you are not running a fever, going to school will have better consequences than staying at home, because you are responsible for a seminar and will cause some disruption among your fellows if you do not go to school. Once you have decided about whether or not to go to school, you will not worry about your decision afterwards. Checking whether or not you are really running a fever is also somewhat tedious. So, if you in fact do not have a fever, it will have the best consequences if you go to school directly without taking your temperature. On the other hand, if you really have a fever, it will have the best consequences if you stay at home, again without taking your temperature. At waking up, you have evidence for all this.

Let us make the following value assumptions, given your evidence at waking up, where s: you go to school, t: you check your temperature, and f: you have a fever. (We ignore the alternatives where you go to school, even though you know that you have a fever, and those where you stay at home even though you know you do not.)

10. $V(f \wedge t \wedge \neg s) = -10$
11. $V(f \wedge \neg t \wedge \neg s) = -9$
12. $V(f \wedge \neg t \wedge s) = -50$
13. $V(\neg f \wedge t \wedge s) = 9$
14. $V(\neg f \wedge \neg t \wedge s) = 10$
15. $V(\neg f \wedge \neg t \wedge \neg s) = 0$
16. $P(f) = 0.5$

You can choose between the alternatives $t \wedge (s \leftrightarrow \neg f)$, $\neg t \wedge s$ and $\neg t \wedge \neg s$. Given the value and probability asssumptions above, you may calculate the following expected utilities (where $EXV(\phi)$ gives the expected value of state ϕ):

17. $EXV(t \wedge (s \leftrightarrow \neg f)) = -0.5$

18. EXV($\neg t \wedge s$) = – 20
19. EXV($\neg t \wedge \neg s$) = – 4.5

So, expected utility consequentialism would tell you to check your temperature, and then go to school iff you have no fever. Kolodny's and MacFarlane's model would also give this result, with an expected utility-maximizing deontic selection function. But if we let such a function select the ideal worlds, given an input consisting of the worlds where f is true, it will select a subset of the ($\neg t \wedge \neg s$)-worlds, and the conditional [if f]$\Box_d(\neg t \wedge \neg s)$ will then come out as true, given how Koldony and MacFarlane have defined the indicative conditional. In the same way, the conditional [if $\neg f$]$\Box_d(\neg t \wedge s)$ will come out as true.

The natural English equivalents of these would be something like:

[20] If you in fact have a fever, you should just avoid going to school, without bothering to take your temperature.
[21] If you in fact do not have a fever, you should just go to school, without bothering to take your temperature.

An objectivist consequentialist would, of course, welcome these as true in the situation (Fever). How could Kolodny and MacFarlane avoid them, given the way they argue for the truth of ([2]) and ([3]) in (Trap)? They cannot point to some constraint against taking risks, because this would also invalidate ([2]) and ([3]). But are ([20]) and ([21]) really something that "naturally occur in the course of deliberation", as Kolodny and MacFarlane say that the conditionals ([2]) and ([3]) in case (Trap) do? I do not think so.

Given another deontic selection function, where the negative value of t is disregarded, because (as many would say) negative effects of an action on the agent's own welfare cannot themselves bring about a moral prohibition, we can still say e.g. that if you have a fever, you *may* stay at home without checking your temperature. And we may construct a similar case when you are evaluating the health status of someone else, e.g. your child, who then would suffer the negative effects of the measuring.

Could we claim that ([20]) and ([21]) are not really problematic, because the relevant information-state in the evaluation of these sentences must be one where we have gathered all available information, and then, there would be no need to perform any more temperature-checking? But how are we, then, to evaluate a claim like $\Box_d t$, which is about an act of information-gathering? Are we to say that any such claim is automatically true, that we always ought to gather as much information as we can? That is obviously not a viable option. Sometimes, an act of information-gathering is worth the costs, sometimes not, and any plausible selection function for moral norms must be sensitive to this.

However, I think that ([2]) and ([3]) may seem a bit more natural to assert in the case (Trap) than ([20]) and ([21]) in case (Fever), but I also think I can explain why.

When we try to calculate expected value, the first thing to do is to estimate the values of the different possible outcomes, and we may start by making some sort of ordinal scale of them. In such a case, we may use "ought" as interchangeable with "having the best outcome", e.g. instead of ([2]), we could say "It will have the best consequences to block shaft *A*, given that they are there." ([20]) or ([21]) do not really seem useful in deliberation, because the truth of their consequents exclude our knowing the antecedents, and because we know beforehand that the difference between t and $\neg t$ do not make a very great a difference in value, given that f and s are held constant. If t were something very bad, so that it would outweigh the expected benefits of gaining certain knowledge, and we could gain (less certain) evidence about f in some other way, we would perhaps be prepared to assert ([20]) or ([21]). We may in a situation like (Fever) say that ([20]) and ([21]) are, in some sense, true, but that they are not the kind of norm we are interested in, in such a situation.

([20]) and ([21]) may seem strange to assert for pragmatic reasons, because the conjunct $\neg t$ in the scope of the operator consequent does not change if we change the antecedent. Why not just assert that you should go to school if you do not have a fever, and stay home if you have a fever? Is this inassertability everything my example shows? Let us consider a slightly revised version of (Fever).

> **(Fever*)** The situation is as in (Fever), with the exception that you know that if you stay at home without checking your temperature, you will feel worried about missing school, since you might have been able to go to school without infecting your fellows. On the other hand, if you go to school, you will not worry about your fellows. Assume that, in (Fever*), $V(f \wedge \neg t \wedge \neg s) = -15$.

The particular empirical assumptions in (Fever) may of course be changed indefinitely, but the important thing about (Fever*) is that Koldony's and MacFarlane's model runs into trouble, even though the pragmatic reasons that may be used to try to explain the apparent oddity of ([20]) and ([21]) in (Fever) do not apply in (Fever*). (Fever*) differs from (Trap) and (Fever) also in that the alternative with highest expected value, viz. to check your temperature and go to school iff you have no fever, might also be the action with highest actual value. ([21]) will come out as true, even in (Fever*), but ([20]) will come out as false. Instead, we have

> [22] If you in fact have a fever, you should take your temperature and avoid going to school.

Making the question whether or not you should check your temperature depend on whether or not you in fact have a fever does not seem very plausible in a deliberative context, and the reply "It is not the right kind of should!" seems appropriate. Even in (Trap), the conjunction of any of, or both, conditionals ([2]) and ([3]) with ([1]) sound strange: "We ought to block neither shaft, but if they are in shaft *A*, we ought to block that shaft, and if they are in shaft *B*, we ought to block that shaft."

Note that, if we use an indicative conditional, $\rightarrow$, validating modus ponens, we must, if we hold $\Box_d t$ true in (Fever), also hold $f \rightarrow \Box_d t$ and $\neg f \rightarrow \Box_d t$ true. Would not they also be strange to assert, and unnatural to think of in deliberation, just like ([20]) and ([21])? Yes, they would be unnatural to assert in isolation, but they may nevertheless be embedded in an emphasizing context, like

> [23] Maybe you do not have a fever, but even then, you should check, so that you can avoid taking unnecessary risks.

What happens if we just evaluate a conditional like $[\text{if} f]\Box_d(t)$, where the truth-value *s* is not specified, in the scope of the deontic operator, in Kolodny's and MacFarlane's model? It should come out as false, because what you ought to do, given *f*, involves $\neg t$. But it might be argued that if you do not check your temperature, you might end up going to school and infecting your fellows, so that *t* has greater expected utility than $\neg t$, given *f*. This seems to be a case of the well-known Chisholm Paradox (Chisholm 1963) that gives rise to problems in many (if not all) systems of deontic logic, where entering into an optimal action-pattern that is not fulfilled may be worse than entering into a sub-optimal action-pattern. I will not discuss this issue any further here.

So, the above considerations suggest that Kolodny and MacFarlane are wrong when they claim that there is a unified information-sensitive sense of “ought”, that differs both from traditional objectivist and subjectivist conceptions that interacts with an information-sensitive indicative conditional the way they argue. Instead, we should opt for something like a disambiguation solution of their paradox, i.e. that “ought” in some contexts is ambiguous between an objective and a subjective sense, so that ([1]) in (Trap) should be interpreted as referring to a subjective “ought”, and that ([2]) and ([3]) should be interpreted as referring to an objective “ought”.

3.2. Possible Problems with my Explanation

As we have seen, Kolodny and MacFarlane have argued against disambiguation solutions of the type I propose. They claim that neither subjectivism nor disambiguation can adequately handle advice situations like their Dialogue 1 or Dialogue 2, where the agent who thinks that both shafts ought to be left open is confronted with an adviser, who has more information about the location of the miners or other features of the context, and seems to disagree with the “ought”-statements made by the agent (Kolodny & MacFarlane 2010, p.119–121). What am I to say about this?

First, we should note that what I have claimed is that the consequents in ([2]) and ([3]) in (Trap) may be best explained as referring to some objective “ought”. I am not sure that Adviser’s statement in Dialogue 1, that the agent ought to block shaft A, where Adviser knows where the miners are, should be explained that way. Rather, Adviser’s claim might be that given Adviser’s evidence, blocking shaft *A* is the best thing to do. In this way, we could also, I think, make sense of Dialogue 2, where Adviser does not seem to refer to some objective “ought”.

We may recall Kolodny’s and MacFarlane’s agent-relative definition of subjectivism:

> **Subjectivism** “*S* ought (at *t*) to do ϕ” is true iff ϕ-ing is the best choice available to *S* in light of what *S* knows at *t* (Kolodny & MacFarlane 2010, p.118).

Another proposal would be that when we assert what *S* ought to do, we just make a claim about what would be the best choice (e.g. in the expected utility-sense) for *S* to do, given *our* current body of knowledge (or evidence). Such a variant of subjectivism seems more suitable to an advice context. It can make sense of the claim that Adviser really believes that Agent ought to do what would not be best in light of Agent's initial knowledge (evidence) in these situation, which would solve one problem Kolodny and MacFarlane point out with subjectivism, according to their definition, viz. that it cannot explain why Adviser really believes that Agent ought to block shaft *A* in Dialogue 1. In some contexts, e.g. when we try to judge afterwards whether or not an agent has acted wisely, it may be more appropriate to use a version of subjectivism more like Kolodny's and MacFarlane's.

However, Kolodny and MacFarlane would probably complain against my "speaker-relative" subjectivism, that we would have no genuine disagreement in Dialogue 1 or Dialogue 2, in the sense that Agent and Adviser would be asserting incompatible claims about what action Agent should perform: instead they would make claims about what action would be best relative to their different bodies of evidence.

To this I answer that, in both Dialogue 1 and Dialogue 2, Adviser and Agent would have initially incompatible (in the sense of not jointly satisfiable) conceptions on what line of action will maximize expected utility (relative to their belief systems), and listening to Adviser may also have greater expected utility, given Agent's belief system, than not listening. Do we really need more than that to make sense of such advice situations as they describe? They point out that Adviser would not have reason to give advice if Adviser knows that Agent do not trust Adviser. But I do not really understand why this should be a problem. We do not give advice to people that we are sure do not listen to us.

Kolodny's and MacFarlane's main argument against the objectivist type of ought is that it seems useless in deliberation, because we cannot know the actual outcomes. But does their own theory, where the deontic status of propositions is related to a certain "relevant" information-state, fare much better in that respect? They do not say much about how to make sense of the idea of an information-state being "relevant", but they will probably get into problems no matter how they interpret this notion. As e.g. Fred Feldman has noted (Feldman 2006), determining the expected utilities of all one's alternatives is also practically impossible in many situations. Given just our current evidence, or some evidence we could easily acquire, we may not be able to form any determined conception at all of the expected utilities of our different alternatives, and even if we could do that given some larger body of evidence, gathering all that information and performing all the necessary calculations may be extremely time- and energy-consuming. Moving to expected utility consequentialism is thus no solution to the general problem that objective consequentialism often does not give any action-guidance.

My "speaker-relative" subjectivism, and their "agent-relative" subjectivism are also vulnerable to these problems. If we hold that both these oughts are relevant in different contexts, this may also seem to give rise to a disturbing multitude of different oughts. The most plausible alternative may be to say that the objective ought after all is the primary criterion of rightness for actions, and that the subjective oughts are secondary to that e.g. as to be used in some, rather special, contexts as decision procedures aiming at maximizing actual utility. In certain situations, like Kolodny's and MacFarlane's (Trap), where we have a rather limited set of alternatives with not very many different likely outcomes (in relation to the time and resources we have left to decide), it may after all be appropriate to perform expected utility calculations on those alternatives. If the subjective oughts are just decision procedures, and not criterions of rightness, it may also seem less disturbing that we do not have any genuine disagreement in advice situations such as those described in Kolodny's and MacFarlane's dialogues. It is noteworthy that Koldony and MacFarlane never mention this distinction betweeen decision procedures and criterions of rightness, which is commonly made, especially in the debate about consequentialist ethics, and often has been invoked in order to meet the challenge against consequentialism that it fails to give action-guidance.

We should note that Kolodny and MacFarlane argue against subjectivism both that it cannot make sense of disagreement, and that it will invalidate the conditionals ([2]) and ([3]). If we want to keep genuine disagreement in situations like their dialogues, but reject their indicative conditional, perhaps because it, as I have argued, leads to unacceptable results in situations like (Fever), it should be possible to combine a deontic operator that is information-variant the way they argue with an indicative conditional, such as the ordinary material conditional, that is not directly information-variant (other than through the evaluation of its antecedent or consequent).

We may also note that Kolodny's and MacFarlane's information-variant deontic operator do not seem to rule out objective consequentialism a priori. If we want to have objective consequentialism, it seems that we can specify that the relevant information-state for the evaluation of a moral sentence should just contain one world for each alternative, viz. the world that (given some counterfactual determinism) would be realized by that alternative.

4. Concluding remarks

I conclude that Kolodny and MacFarlane have given no strong reasons in support of their claim that adopting their informational model semantics as a whole would be beneficial to deontic logic, because it would be better suited than standard semantics to capture some common forms of moral reasoning. I have tried to show that their indicative conditional leads to implausible results in some contexts of moral reasoning, and that the examples where it seems to give plausible results can be explained without adopting it. I have proposed an explanation of the apparent paradox in cases like (Trap) consisting in disambiguating between different sense of “ought”, and argued that Kolodny and MacFarlane have dismissed explanations of this type prematurely.

Acknowledgements

Drafts of this text have been presented at philosophy seminars at Stockholm University and the Royal Institute of Technology. I would like to thank the participants at these seminars, in particular Erik Carlson, Karin Enflo, Sven Ove Hansson, Sofia Jeppsson, Jonas Olson, Tor Sandqvist and Torbjörn Tännsjö for useful comments.

References

Chisholm, R. M. (1963). Contrary-to-Duty imperatives and deontic logic. *Analysis*. 24. pp. 33–36.

Feldman, F. (2006). Actual utility, the objection from impracticality, and the move to expected utility. *Philosophical Studies*. 129. pp. 49–79.

Jackson, F. (1991). Decision-Theoretic consequentialism and the nearest and dearest objection. *Ethics*. 101. pp. 461–482.

Kolodny, N. & MacFarlane, J. (2010). Ifs and oughts. *Journal of Philosophy*. 107. pp. 115–143.

Karl Pettersson
Department of Philosophy
Uppsala University
karl.pettersson@filosofi.uu.se